3 | Ondes de matière

Exercice 1 – Longueur d'onde de de Broglie

Dans la limite $v \ll c$, calculer la longueur d'onde de de Broglie

1. d'un électron d'énergie cinétique $10\,\mathrm{eV}$.
2. d'une personne de $70\,\mathrm{kg}$ se déplaçant à la vitesse de $1\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$.

Exercice 2 – Questions de cours (sujet avril 2022)

On considère une particule de masse m dans un puits infini de potentiel unidimensionnel de longueur L. Ce potentiel V est défini mathématiquement par :

$$V(x) = \begin{cases} +\infty \ \text{ si } x < 0 \ ; \\ 0 \ \text{ si } x \in [0; L] \ ; \\ +\infty \ \text{ si } x > L. \end{cases}$$

1. Pour $E > 0$, montrer que la partie spatiale de la fonction d'onde est

   $$\phi(x) = C\cos(kx) + S\sin(kx),$$

   avec k une constante à déterminer. Les constantes C et S seront déterminées dans la suite.
2. À partir des conditions aux bords, déterminer la valeur de C et exprimer k en fonction de L et d'un entier n strictement positif .
3. En déduire les niveaux d'énergie.
4. Déterminer S en utilisant l'interprétation de Born de la fonction d'onde.
5. Tracer la partie spatiale de la fonction d'onde pour les trois premiers niveaux d'énergie.
6. Faire de même avec la densité de probabilité.
7. Montrer que pour $E \leq 0$, la fonction d'onde est nulle.

Exercice – Marche de potentiel

On considère une particule d'énergie E et de masse m provenant de $-\infty$ et rencontrant une marche de potentiel

$$V(x) = \begin{cases} 0, \; x \in]-\infty;0[\text{ (région I)} \; ; \\ V_0, \;\; x \in [0;+\infty[\text{ (région II)}. \end{cases}$$

1. **Cas** $E > V_0$
   - 1.a. Dans la région I, montrer qu'un état stationnaire de la particule peut être représenté par la fonction d'onde $\phi(x) = A_1 \exp(\mathrm{i}\, k_1 x) + B_1 \exp(-\mathrm{i}\, k_1 x)$, avec k_1 une constante à déterminer.
   - 1.b. Dans la région II, montrer qu'un état stationnaire de la particule peut être représenté par la fonction d'onde $\phi(x) = A_2 \exp(\mathrm{i}\, k_2 x)$, avec k_2 une constante à déterminer.
   - 1.c. Pour quelle raison peut-on supposer ϕ et $\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}x}$ continues au niveau de la marche $x = 0$? En déduire l'expression de $A_{1/2}$ et B_1 en fonction de k_1 et k_2.
   - 1.d. Que représente $R = \left|\frac{B_1}{A_1}\right|^2$? L'exprimer en fonction de k_1 et k_2.
   - 1.e. Déterminer la probabilité de transmission à l'aide de l'interprétation de Born.
   - 1.f. Discuter le cas $E \gg V_0$.
2. Traiter le cas $E < V_0$ dans la région II.
3. En quoi les solutions déterminées précédemment ne décrivent pas un état physique de la particule ? En quoi ces solutions restent utiles pour déterminer un état physique pertinent ?

Exercice 3 – Barrière de potentiel

On considère une particule libre de masse m et provenant de la gauche. Au point d'abscisse $x = 0$, elle rencontre une barrière de potentiel de hauteur $V_0 > 0$ et de largeur a :

$$V(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < 0 \text{ (région I)} \\ V_0 \text{ si } x \in [0; a] \text{ (région II)} \\ 0 \text{ si } x > a \text{ (région III).} \end{cases}$$

On se place dans le cas où l'énergie E de la particule est inférieure à la hauteur de la barrière ($V_0 > E > 0$).

1. Fonctions d'ondes dans les régions I et III
   1.a. Montrer que dans la région 1 (respectivement 3), la fonction d'onde de la particule peut s'écrire :
   $$\phi_{1/3}(x) = A_{1/3}e^{ikx} + B_{1/3}e^{-ikx},$$
   avec k une constante à déterminer.
   1.b. Pour quelle raison $B_3 = 0$?
2. Montrer qu'à l'intérieur de la barrière (région II), la fonction d'onde peut s'écrire :
   $$\phi_2(x) = A_2e^{qx} + B_2e^{-qx},$$
   avec q une constante à déterminer.
3. En utilisant la continuité de la fonction d'onde et de sa dérivée première aux points d'abscisse $x = 0$ et $x = a$, établir un système d'équation portant sur les constantes A_j et B_j pour $j \in \{1; 2; 3\}$.
4. À partir du système précédent, exprimer A_1 et B_1 en fonction de A_3.
5. On définit deux coefficients R et T de la manière suivante :
   $$R = \left|\frac{B_1}{A_1}\right|^2 \text{ et } T = \left|\frac{A_3}{A_1}\right|^2.$$
   5.a. Interpréter ces deux coefficients ?
   5.b. Exprimer T en fonction de V_0 ainsi que de la masse m et de l'énergie E de la particule.
   5.c. Déterminer T dans l'approximation d'une « barrière épaisse » ($qa \gg 1$).
   5.d. Dans cette approximation, calculer T dans le cas d'un électron d'énergie $E = 1\,\text{eV}$, d'une barrière de longueur $a = 1\,\text{Å}$ et de hauteur $V_0 = 2E$.