2 | Modèles de l'atome

Exercice 1 – Ordre de grandeur du rayon d'un atome

Trouver un ordre de grandeur de la taille d'un atome en supposant qu'un solide tel que le fer est la juxtaposition de petits cubes de côtés de longueur a. La masse volumique du fer est $\rho = 7{,}8\,\mathrm{g \cdot cm^{-3}}$, la masse molaire du fer est $M_{\mathrm{Fe}} = 56\,\mathrm{g \cdot mol^{-1}}$ et la constante d'Avogadro (déterminée pour la première fois par Johann Loschmidt en 1865, puis par Jean Perrin d'une dizaine de manières différentes) a pour valeur $\mathcal{N}_{\mathrm{A}} \approx 6 \times 10^{23}\,\mathrm{mol^{-1}}$.

Exercice 2 – Modèle de Rutherford (Perrin et Nagaoka)

Au début du XX $^{\text{e}}$ siècle, Jean Perrin, Hantaro Nagaoka et Ernest Rutherford proposent successivement un même modèle planétaire de l'atome dans lequel le noyau de l'atome, chargé positivement, jouerait le rôle du Soleil autour duquel tourneraient des électrons dont la charge totale serait exactement l'opposée de celle du noyau. Pour étudier les limites de ce modèle, nous considérons un atome d'hydrogène constitué d'un électron en mouvement circulaire uniforme autour du proton.

1. **Cadre de la mécanique du point**
   Dans cette question, on étudie le mouvement de l'électron dans le cadre de la mécanique classique. On choisit pour référentiel celui du proton lié à un repère cartésien.
   1.a. Pourquoi peut-on supposer que le référentiel du proton est galiléen ?
   1.b. Quelles forces s'exercent sur l'électron ? Laquelle de ces forces est prédominante ?
   1.c. Exprimer le vecteur accélération de l'électron en fonction de la norme v de sa vitesse et du rayon r de son orbite.
   1.d. En appliquant la deuxième loi de Newton à l'électron, exprimer v^2 en fonction de r, de la vitesse de la lumière dans le vide et du rayon classique de l'électron :

$$R = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{mc^2}.$$

1.e. Exprimer la période T du mouvement circulaire de l'électron en fonction de c, r et R.

1.f. Exprimer l'énergie mécanique E de l'électron en fonction de r, R, c et m.

2. **Prise en compte de l'électrodynamique**
L'électrodynamique classique permet de montrer qu'une charge ne se déplaçant pas en mouvement rectiligne uniforme (par rapport à un référentiel galiléen), rayonne de l'énergie. La puissance rayonnée par un électron ayant une accélération de norme a est donnée par la formule de Larmor :

$$\mathcal{P} = \frac{e^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3} a^2.$$

2.a. Expliquer en quoi ce rayonnement a un effet sur l'orbite de l'électron et donner l'expression du vecteur accélération de l'électron.

2.b. On suppose à présent que l'accélération est toujours donnée par : $a = v^2/r$. Exprimer la puissance rayonnée par l'électron.

2.c. À l'aide d'un raisonnement énergétique, montrer que la distance r séparant l'électron du proton vérifie : $\dot{r} = -K/r^2$ avec K une constante positive qui s'exprime en fonction de R et c. Donner l'expression de la constante K.

2.d. En supposant qu'à l'instant initial l'électron est à une distance r_0 du proton, exprimer la durée τ de la chute de l'électron sur le proton. Faire l'application numérique en prenant pour r_0 l'ordre de grandeur déterminé à l'exercice précédent.

2.e. Comparer ce temps de chute à la période T_0 de révolution de l'électron autour du proton si son mouvement était circulaire et de rayon r_0.

Exercice 3 – Modèle de Bohr

En 1913, Niels Bohr propose un nouveau modèle d'atome permettant de concilier le spectre d'émission discret d'un atome avec la structure lacunaire de l'atome mise en évidence par Rutherford deux ans plus tôt. Dans ce modèle, Bohr propose que les électrons sont sur des orbites circulaires dont le rayon ne peut prendre que certaines valeurs précises (souvent appelées "couches électroniques") contrairement au modèle planétaire de Rutherford. Par ailleurs, il reprend l'idée d'Einstein, en supposant qu'un électron qui change d'orbite pour se rapprocher du noyau émet de la lumière de fréquence ν sous la forme d'un quantum d'énergie $h\nu$.
Dans cet exercice, on se propose de reprendre une partie de son raisonnement.

1. Montrer que la dimension de la constante de Planck est celle d'un moment cinétique :

$$\vec{\sigma} = \vec{r} \wedge \vec{p}.$$

2. Pour justifier son modèle, Bohr suppose que le moment cinétique de l'électron est quantifié, c'es-à-dire que celui-ci ne peut prendre que certaines valeurs dépendantes d'un entier n strictement positif

$$\sigma_n = m r_n v_n = n\hbar \tag{2.2}$$

où r_n désigne le rayon de l'orbite en question et v_n la vitesse de l'électron sur cette orbite.

2.a. Justifier que la norme du moment cinétique vaut $\sigma = mrv$ et déduire de sa quantification les expressions de v_n et r_n en fonction de n.

2.b. Déterminer v_1 et r_1, les expressions de v_n et r_n pour $n = 1$. Exprimer v_n et r_n en fonction de v_1, r_1 et n. Faire les applications numériques pour r_1 et v_1. Commenter.

2.c. En déduire l'expression de l'énergie mécanique E_n en fonction de E_1 et n. Donner l'expression et la valeur numérique de E_1. Commenter.