Physique moderne

Rattrapage

durée : 1h30 (2h en cas de tiers-temps)

Aucune sortie avant 1h d'épreuve

Instructions à lire avant de commencer

Sont interdits :

— les documents ;

— **tous** les objets électroniques (calculatrice, téléphone, montre connectée, *etc.*) ;

— les déplacements et les échanges.

Consignes :

1. vérifiez que le sujet est composé de 3 pages ;
2. indiquez le nombre total de pages de votre copie ;
3. numérotez toutes les pages de la copie ;
4. une attention particulière sera donnée à la qualité de la rédaction ;
5. en cas d'erreur dans l'énoncé, vous l'indiquerez sur votre copie et continuerez le devoir.

Le barème est donné à titre indicatif

Données

- constante de Planck réduite (valeur communiquée aux étudiants) : $\hbar = \frac{h}{2\pi} \approx 1 \times 10^{-34}$ U.S.I (U.S.I. : Unité du Système Internationale) ;
- $1\,\text{eV} \approx 2 \times 10^{-19}\,\text{J}$;
- remarque : valeur (fausse) donnée par l'énoncé initial $\hbar \approx 6 \times 10^{-34}$ U.S.I

Exercice 1 – Questions de cours (7 points)

1. Dimension et unité de la constante de Planck
   1.a) Quelle relation pouvez-vous utiliser pour retrouver la dimension et l'unité de la constante de Planck ? Plusieurs choix sont possibles.
   1.b) Retrouver la dimension et l'unité de la constante de Planck à partir de la formule précédente.

1.c) Pourquoi la constante de Planck et la constante de Planck réduite ont la même dimension ?

1.d) Quelle grandeur physique (notamment utilisée en mécanique classique) a la même dimension que la constante de Planck ?

2. Effet tunnel

2.a) Pourquoi ne peut-on pas observer l'effet tunnel pour une particule dans un puits infini de potentiel ?

2.b) Représenter graphiquement une énergie potentielle V en fonction de la position r qui permet d'observer l'effet tunnel (plusieurs réponses sont possibles).

2.c) Sur ce même graphique, indiquer un intervalle d'énergie pour lequel l'effet tunnel peut-être observé.

Solution 1

1. Constante de Planck

1.a) ***[1 pt nom et formule]*** Relations possibles : Planck-Einstein ou de Broglie.

1.b) ***[1 pt = 0,5 + 2*0,25 : dem + dim + unité]*** $[h] = \mathsf{ML}^2\mathsf{T}^{-1}$. Unité de h : $\mathrm{J} \cdot \mathrm{s}$.

1.c) ***[0,5 pt]*** Les deux constantes ne diffèrent que d'un facteur 2π sans dimension.

1.d) ***[0,5 pt]*** Au choix : une action, un moment cinétique ou le spin.

2. Effet tunnel

2.a) ***[2 pt]*** On parle d'effet tunnel lorsqu'une particule a une probabilité non nulle de franchir une barrière de potentiel alors que son énergie totale est inférieure à la "hauteur" de cette barrière (classiquement la particule ne pourrait pas franchir cette barrière). Dans le cas d'un puits infini de potentiel, la particule devrait avoir une énergie infinie pour sortir de ce puits ce qui n'est pas possible.

2.b) ***[1 pt]***

2.c) ***[1 pt]***

Exercice 2 – Applications directes (7 points)

1. La longueur d'onde maximale pour observer l'effet photoélectrique sur un métal est notée λ_1.

1.a) Exprimer le travail d'extraction W_1 (énergie minimale à fournir pour extraire un électron).

1.b) Si la longueur d'onde de la lumière utilisée est notée λ_2 exprimer l'énergie cinétique maximale des électrons extraits.

1.c) Parmi les deux longueurs l'onde précédentes (λ_1 et λ_2), laquelle est la plus grande ?

2. Sachant que le travail d'extraction du zinc vaut $W_{\mathrm{Zn}} \approx 4\,\mathrm{eV}$, peut-on observer l'effet photoélectrique avec de la lumière visible ?
3. Après avoir rappelé la relation de de Broglie, exprimer la longueur d'onde de de Broglie d'un atome d'hydrogène dans son état fondamental d'énergie notée E_0.

Solution 2

1. 1.a) ***[1 pt]*** $W_1 = hc/\lambda_1$

   1.b) ***[1 pt : les deux expressions]***
   Par conservation de l'énergie, l'énergie cinétique maximale $K_{\max}$ d'un tel électron est

$$K_{\max} = E_2 - W_1,$$

   avec E_2 l'énergie d'un photon de longueur d'onde λ_2. Soit au final :

$$K_{\max} = hc\left(\frac{1}{\lambda_2} - \frac{1}{\lambda_1}\right).$$

   1.c) ***[1 pt : rép et justification]***
   L'énergie d'un photon de longueur d'onde λ_2 est supérieure à celle d'un photon de longueur d'onde λ_1. D'après la relation de Planck–Einstein, l'énergie étant inversement proportionnelle à la longueur d'onde, on a : $\lambda_1 > \lambda_2$.

2. ***[2 pt : expression + valeur + spectre + invisible]***
   La longueur d'onde maximale (voir question précédente) pour observer l'effet photoélectrique avec du zinc est $\lambda_{\max} = hc/W_{\mathrm{Zn}}$. L'application numérique donne $\lambda_{\max} \approx 220\,\mathrm{nm}$ ce qui est en dehors du spectre visible de la lumière dont les longueurs d'onde (dans le vide) sont dans l'intervalle $[400\,\mathrm{nm}; 800\,\mathrm{nm}]$.

3. ***[2 pt]*** D'une part $p = \hbar k = h/\lambda_0$ et $E_0 = \frac{p^2}{2m}$, soit

$$\lambda_0 = \frac{h}{\sqrt{2mE_0}}.$$

Exercice 3 – Électron confiné (6 points)

On considère un électron de masse m et libre de se déplacer uniquement sur un segment de droite de longueur L. Son énergie potentielle V est nulle sur ce segment et son énergie totale E se réduit donc à son énergie cinétique. L'origine du repère est choisie de manière à ce que ce segment soit confondu avec l'intervalle $[0, L]$.
La partie spatiale de sa fonction d'onde $\psi(x)$ vérifie alors l'équation :

$$\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\mathrm{d}^2\psi}{\mathrm{d}x^2} + E\psi = 0. \tag{1}$$

1. Résolution de l'équation (1)
   1.a) Quel nom porte l'équation (1) ?
   1.b) Montrer que les solutions de cette équation sont de la forme

   $$\psi(x) = C\cos(kx) + S\sin(kx),$$

   avec k une constante à exprimer en fonction des données du problème. Les constantes C et S seront déterminées dans la suite.
2. Détermination de C
   2.a) On admettra que si l'énergie potentielle de l'électron est infinie en dehors du segment (intervalle $[0, L]$), sa probabilité de présence en dehors de ce segment est nulle. Dès lors, quelle relation devra vérifier la fonction d'onde ψ aux bords du segment ?
   2.b) En déduire la valeur de C.
3. Quantification de l'énergie
   3.a) Montrer que les conditions aux limites trouvées à la question 2.a entraînent la quantification de l'énergie.
   3.b) Déterminer ces niveaux d'énergie en fonction des données du problème.
4. À partir de l'interprétation probabiliste de la fonction d'onde, montrer que $S = \sqrt{2/L}$. Rappel : $2\sin^2(x) = 1 - \cos(2x)$.
5. Donner une application (existante ou à venir) du confinement d'une particule dans une boîte.

Solution 3

1. 1.a) ***[0,5 pt]***

Il s'agit de l'équation de Schrödinger indépendante du temps (dans le cas où l'énergie potentielle est nulle).

1.b) *[1 pt]*
En posant $k^2 = 2mE/\hbar^2$, l'équation (1) peut s'écrire

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + k^2\psi = 0.$$

Le polynôme caractéristique associé à cette EDO2H a deux racines imaginaires $\pm ik$ (dans le cas $E > 0$). Les solutions de l'équation (1) sont donc bien de la forme demandée.

2. 2.a) *[1 pt avec justification]*
Si la probabilité de présence de l'électron est nulle en dehors du segment, la fonction d'onde associée doit s'annuler sur les bords en raison de l'interprétation probabiliste de la fonction d'onde :

$$\psi(0) = \psi(L) = 0.$$

2.b) *[0,5 pt]*
La solution trouvée et la condition au bord situé à l'abscisse $x = 0$ sont compatibles si $C = 0$.

3. *[2 pt]*

3.a) Pour que la solution et la condition au bord situé à l'abscisse $x = L$ soient compatibles, il faut aussi $S\sin(kL) = 0$, relation vérifiée :

— soit si $S = 0$, mais alors la fonction d'onde est nulle et la probabilité de présence de l'électron l'est également (il n'y a pas d'électron !)

— soit si $\sin(kL) = 0$, relation vérifiée si k ne peut prendre que certaines valeurs :

$$k \in \{k_n = n\pi/L; n \in \mathbb{N}^*\}.$$

Puisque $k^2 = 2mE/\hbar^2$, l'énergie de l'électron est également quantifiée.

3.b) Les niveaux d'énergie sont :

$$E_n = \frac{h^2}{8mL^2}n^2, \quad \text{avec} \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

4. ***[1 pt : justification intégrale + calcul]***
Les réponses aux questions précédentes montrent que les fonctions d'ondes possibles de l'électron sont de la forme

$$\psi_n(x) = S \sin(n\pi x/L).$$

L'interprétation probabiliste impose que la probabilité de présence de l'électron dans l'ensemble de l'espace "autorisé" (ici $[0; L]$) soit égale à 1 :

$$\int_0^L \psi^2(x)\,\mathrm{d}x = 1.$$

Le calcul donne $S = \sqrt{2/L}$.

5. ***[0 pt]*** Applications possibles : q-bit et certains lasers.