Physique moderne

Devoir n° 2

durée : 1h30 (2h en cas de tiers-temps)

Aucune sortie avant 1h d'épreuve

Instructions à lire avant de commencer

Sont interdits :

— les documents ;

— tous les objets électroniques (téléphone, tablette, ordinateur, montres connectées, *etc.*) de même que les calculatrices (collège et lycée) ;

— les déplacements et les échanges.

Consignes :

1. vérifiez que votre énoncé compte 4 pages et 4 exercices ;
2. indiquez le nombre total de feuilles utilisées sur la première page de la copie ;
3. numérotez l'ensemble des feuilles de votre copie ;
4. en cas d'erreur dans l'énoncé, vous l'indiquerez sur votre copie et continuerez le devoir.

Calculs, applications numériques et rédaction

1. Une réponse non justifiée ne sera pas prise en compte lors de la correction.
2. Pour les exercices 2 à 4, une expression littérale *et* une application numérique sont demandées.
3. Les applications numériques se feront par ordre de grandeur et avec un seul chiffre significatif. Par exemple : $3{,}14 \times 10^{-25} \sim 1 \times 10^{-25}$; $5 \times 10^{-2} \sim 1 \times 10^{-1}$.
4. Les notations doivent être définies.
5. Une attention particulière sera donnée à la qualité de la rédaction.

Le barème est donné à titre indicatif

Données

- constante de Planck réduite : $\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1{,}05 \times 10^{-34}\,\mathrm{J \cdot s}$;
- masse de l'électron : $m_e = 9{,}1 \times 10^{-31}\,\mathrm{kg}$;
- masse d'un nucléon $m = 1{,}7 \times 10^{-27}\,\mathrm{kg}$;
- $1\,\mathrm{eV} = 1{,}6 \times 10^{-19}\,\mathrm{J}$.

Exercice 1 — Questions ± de cours (8 points)

1. Rappeler l'équation de Schrödinger (dépendante du temps) pour une particule de masse m se déplaçant selon l'axe (Ox) dans un potentiel quelconque V.
2. Rappeler l'interprétation de $|\psi|^2$ (module carré de la fonction d'onde ψ). À qui est due cette interprétation ?
3. Dans un espace à d dimensions, quelle est la dimension physique de la fonction d'onde ?
4. Inégalités d'Heisenberg
   4.a) Rappeler la relation d'indétermination d'Heisenberg pour la position x et la quantité de mouvement p (selon le même axe). Que représentent Δx et Δp dans cette relation ?
   4.b) Pourquoi n'est-il pas correct de parler de relation d'« **incertitude** » ?
5. Un électron rencontre une barrière de potentiel de hauteur supérieure à l'énergie de la particule. Quel phénomène peut être observé qui ne serait pas possible pour une particule classique ? Donner une application technique ou théorique de ce phénomène.

Solution 1

1. (/1)

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t}(x,t) = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}(x,t) + V(x,t)\psi(x,t) \tag{1}$$

   où le potentiel V est fonction de x **et** de t.
2. (/2) Toujours à une dimension d'espace

$$|\psi|^2(x,t)\,\mathrm{d}x$$

   représente la probabilité de trouver la particule le long d'un segment de longueur dx. Cette interprétation est due à Max Born (1926).
   Remarque : dans le cas à trois dimensions d'espace, c'est

$$|\psi|^2(\vec{r},t)\ \mathrm{d}^3 r$$

   qui s'interprète comme la probabilité de présence de la particule dans un élément de volume $\mathrm{d}^3 r$ entourant le point $\vec{r}$.
3. (/1) À partir de l'interprétation probabiliste, une analyse dimensionnelle montre qu'à d dimension d'espace, la fonction d'onde a pour dimension physique $\mathcal{L}^{-d/2}$.

4. 4.a) (/1) En notant respectivement Δx et Δp les indéterminations (ou dispersions) sur la position et la quantité de mouvement, l'inégalité d'Heisenberg portant sur ces variables s'écrit (version historique) :

$$\Delta x \Delta p \gtrsim \hbar,$$

ou de manière précise

$$\Delta x \Delta p \geq \hbar/2.$$

4.b) (/1) Dans le cadre d'expériences, le terme "incertitude" est utilisé pour désigner les erreurs commises lors de la mesure d'une grandeur physique. Ces erreurs étant le plus généralement dues à l'expérimentateur et à l'appareil de mesure. L'inégalité d'Heisenberg n'est quant à elle liée à aucune mesure de position ou de quantité de mouvement du système étudié, mais indique une limite imposée par les lois de la mécanique quantique.
Remarque : cette inégalité n'a plus le statut de principe, puisqu'elle peut être démontrée.

5. (/2) Dans cette situation, on peut observer l'effet tunnel : contrairement au cas d'une particule classique, une particule "quantique" a une probabilité non nulle de franchir la barrière. Si la particule provient de la gauche, l'effet tunnel prévoit donc que la particule peut se propager à droite de la barrière. Deux applications possibles sont : le microscope à effet tunnel et l'interprétation de la radioactivité α à l'aide du modèle de Gamow.

Exercice 2 — Applications directes (5 points)

1. Pour que sa longueur d'onde de de Broglie soit $\lambda = 0{,}1\,\mathrm{nm}$, quelle doit être l'énergie cinétique E_c d'un électron ? d'un neutron ?
2. Pour une énergie cinétique $E_c = 1\,\mathrm{MeV}$, quelles sont la fréquence f et la longueur d'onde de de Broglie λ d'un électron ? d'un neutron ?

Solution 2

1. (3 points) La relation de de Broglie s'écrit $\vec{p} = \hbar\vec{k}$ soit en terme de norme $p = \hbar k$. L'énergie cinétique de la particule est $E_c = \frac{1}{2}mv^2$ soit $E_c = \frac{p^2}{2m}$ et la longueur d'onde de de Broglie est liée au nombre d'onde par $\lambda = 2\pi/k$. Ces différentes relations donnent

$$E_c = \frac{h^2}{2m\lambda^2}.$$

Pour l'électron on trouve $E_c \approx 10^{-16}\,\mathrm{J}$ et pour le neutron $E_c \approx 10^{-19}\,\mathrm{J}$.

2. (2 points) Pour la longueur d'onde, il suffit d'utiliser la relation utilisée précédemment pour montrer

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2mE_c}}.$$

Après conversion de l'énergie en joule, on trouve pour l'électron

$$\lambda \approx 1 \times 10^{-12}\,\mathrm{m} = 1\,\mathrm{pm}$$

et

$$\lambda \approx 1 \times 10^{-13}\,\mathrm{m} = 0{,}1\,\mathrm{pm}$$

pour le neutron.
En utilisant la relation de Planck–Einstein liant l'énergie de la particule à la fréquence f, on obtient

$$f = \frac{E_\mathrm{c}}{h}.$$

Soit $f \approx 1 \times 10^{20}\,\mathrm{Hz}(= 0{,}1\,\mathrm{ZHz})$ pour l'électron comme pour le neutron (ZHz : zettahertz.).

Exercice 3 — Diffraction d'électrons (retiré)

Pour déterminer les caractéristiques du noyau, une mince feuille d'or ($^{197}_{79}\mathrm{Au}$) peut être bombardée d'électrons afin d'étudier la figure de diffraction formée par les électrons après avoir traversé la feuille. Pour observer une telle figure, l'énergie des électrons doit être d'une centaine de MeV. Pour le rayon du noyau d'un atome d'or, on prendra $R = 7\,\mathrm{fm}$. Dans la suite, nous supposerons que les termes « diffraction » et « interférence » sont synonymes.

1. Montrer que c'est bien dans cette gamme d'énergie que les électrons peuvent effectivement être diffractés.
2. Si l'on souhaitait effectuer la même expérience avec de la lumière, dans quelle partie du spectre de la lumière se situerait la source ?
3. Que confirme, sur la nature de l'électron, le fait que ces derniers puissent être diffractés ? Quel scientifique a émis cette hypothèse pour la première fois ?

Exercice 4 — Puits de potentiel infini (7 points)

Étudiante en PréIng 2, Sophie cherche les états stationnaires d'une particule de masse m confinée dans un puits infini de potentiel V défini mathématiquement par :

$$V(x) = \begin{cases} 0 \ \text{ si } x \in [-a/2; a/2] \ ; \\ +\infty \ \text{ sinon,} \end{cases}$$

où a représente la largeur du puits. Ses conclusions sont les suivantes :

- l'énergie de la particule est quantifiée et les énergies accessibles s'écrivent

$$E_n = n\frac{\pi^2\hbar^2}{2ma^2} \ \text{ avec } n \in \mathbb{N}^*$$

- la fonction d'onde associée à l'énergie E_1 s'écrit :

$$\psi(x,t) = \frac{2}{a}\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}E_1 t/\hbar}$$

1. Quelle condition doit vérifier la fonction d'onde aux bords du puits ?

2. La fonction d'onde proposée par Sophie est-elle compatible avec les conditions aux bords ? Corriger si nécessaire.
3. La fonction d'onde proposée est-elle normalisée ? Corriger si nécessaire.
4. Comment appelle-t-on l'état d'énergie E_1 ?
5. Vérifier et, si nécessaire, corriger l'expression de l'énergie E_n proposée par Sophie.

Solution 4

1. (/1) Le potentiel étant infini en dehors de l'intervalle $[\pm a/2]$, la fonction d'onde doit s'annuler sur les bords (la particule ne peut pas être en dehors de cet intervalle) :

$$\psi(-a/2, t) = \psi(a/2, t) = 0 \tag{2}$$

2. (/2) La fonction d'onde proposée par Sophie ne vérifie pas cette condition puisque $\sin(\pi/2) \neq 0$.
La solution de l'équation de Schrödinger indépendante du temps dans le puits (sans tenir compte des conditions aux bords) s'écrit :

$$\phi(x) = C\cos(kx) + S\sin(kx), \text{ avec } \quad k = \sqrt{2mE}/\hbar \quad \text{et} \quad C, S \in \mathbb{R}.$$

Les conditions aux bords imposent $S = 0$ et

$$k \in \{k_n = n\pi/a; n \in \mathbb{N}^*\}$$

La partie spatiale de la fonction d'onde associée à $n = 1$ doit donc s'écrire :

$$\phi_1(x) = C\cos(\pi x/a).$$

3. (/2) La fonction d'onde proposée n'est pas normalisée puisque

$$\int_{-a/2}^{a/2} \sin^2(\pi x/a)\ \mathrm{d}x = \frac{a}{2}.$$

La normalisation de la fonction d'onde proposée par Sophie (ou la fonction d'onde ϕ qui vérifie bien les conditions aux bords) donne comme facteur de normalisation $\sqrt{a/2}$.
4. (/1) L'état d'énergie $E_{n=1}$ est celui ayant l'énergie la plus basse et s'appelle l'état **fondamental**.
5. (/1) La quantification des k impose également celle de l'énergie, soit

$$E_n = n^2 \frac{\pi^2\hbar^2}{2ma^2}.$$