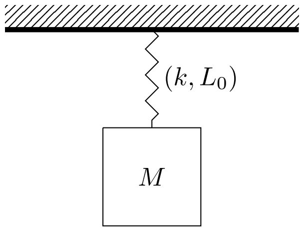
Ondes - TD 1

Le cas échéant, et sauf mention contraire, les situations sont étudiées dans un référentiel supposé galiléen.

Problème I

Soit un ressort idéal sans masse, de constante de rappel k et de longueur au repos L_0, suspendu verticalement par une de ses extrémités.



1. On accroche une masse M au bas du ressort et on la laisse descendre lentement jusqu'à ce qu'elle s'arrête. Quelle est la longueur du ressort à ce moment?
2. Plutôt que de laisser la masse descendre lentement, on la laisse simplement tomber.
   (a) En appliquant la deuxième loi de NEWTON, établir l'équation du mouvement de la masse.
   (b) Résoudre le problème de CAUCHY pour décrire le mouvement de la masse.
   (c) Exprimer la pulsation ω, fréquence ν et période τ temporelles des oscillations. Ces grandeurs dépendent-elles de g?
   (d) $\forall$ l'instant t_0, quelle est la longueur moyenne $\langle \ell(t_0) \rangle$ du ressort sur une période?

   N.B.: pour une fonction F de période τ:

$$\langle F \rangle (t_0) = \frac{1}{\tau} \int_{t_0}^{t_0+\tau} F(t)dt \qquad (1)$$

3. Approche énergétique
   (a) Retrouver l'équation du mouvement de la masse par un raisonnement énergétique.
   (b) Montrer que $\forall\ t_0$,

$$\langle E_c \rangle (t_0) = \langle E_p \rangle (t_0) = \frac{E}{2} \qquad (2)$$

   où E_c, E_p et E sont respectivement les énergies cinétique, potentielle et totale de la masse. Commenter.

Problème II *(supp.)*
Soit un circuit électrique consitué d'une bobine d'inductance L et d'un condensateur de capacité C en série.

1. Par analyse dimensionnelle, déterminer une grandeur assimilable à une fréquence angulaire en utilisant les quantités physiques du problème.

2. En appliquant la loi des mailles, établir l'équation déterminant l'évolution temporelle de la charge Q du condensateur.
   En déduire la pulsation ω des oscillations de $Q(t)$.
   Faire une analogie avec un oscillateur mécanique (système masse-ressort).

3. Résoudre l'équation pour $Q(t)$ si, à $t = 0$, le condensateur porte une charge Q_0 et le courant électrique est nul.

4. Approche énergétique:

   (a) Rappeler l'expression de l'énergie E_C emmagasinée dans un condensateur et de l'énergie E_L dans la bobine.
   Faire une analogie avec un oscillateur mécanique.

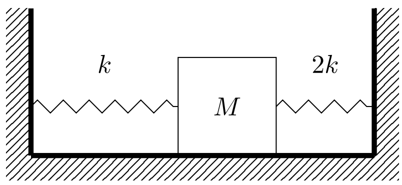
   (b) Retrouver l'équation déterminant l'évolution temporelle de Q par un raisonnement énergétique.

   (c) Montrer que $\forall\ t_0$,
   $$\langle E_C \rangle(t_0) = \langle E_L \rangle(t_0) = \frac{E}{2} \tag{3}$$
   où E est l'énergie électrique totale du circuit. Commenter.

Problème III
On considère un bloc de masse M libre de glisser sans frottement sur un plan horizontal. Il est attaché de chaque côté par des ressorts idéaux sans masses, de constante de rappel k et $2k$, respectivement, eux-mêmes attachés à des surfaces verticales.

1. Calculer la pulsation du système.

2. Si la norme de la vitesse du bloc au moment où il passe au point d'équilibre est v, quelle est l'amplitude de l'oscillation du bloc?



Problème IV *(supp.)*
Soit une particule ponctuelle soumise à un "potentiel" $V(x)$ (abus de language, il s'agit d'une énergie potentielle).
Montrer que si x_0 est un minimum de $V(x)$, alors la particule se comporte approximativement comme un oscillateur harmonique simple dans le voisinage de x_0.

Déterminer x_0 et la pulsation des oscillations dans le voisinage de x_0 pour le "potentiel" de LENNARD-JONES:

$$V(x) = 4\epsilon \left[\left(\frac{\sigma}{x}\right)^{12} - \left(\frac{\sigma}{x}\right)^{6} \right]. \tag{4}$$

Problème V *(supp.)*
Retrouver les identités trigonométriques suivantes en utilisant la formule d'Euler.

1. $\sin(\theta + \phi) = \sin(\theta)\cos(\phi) + \cos(\theta)\sin(\phi)$,
2. $\cos(\theta + \phi) = \cos(\theta)\cos(\phi) - \sin(\theta)\sin(\phi)$,
3. $\cos(3\theta) = 4\cos^3(\theta) - 3\cos(\theta)$,
4. $\sin(3\theta) = -4\sin^3(\theta) + 3\sin(\theta)$.

Ondes - TD 2

Le cas échéant, et sauf mention contraire, les situations sont étudiées dans un référentiel supposé galiléen.

Problème I

On reprend le problème I du TD1, en ajoutant une force de frottement (*e.g.* de la part de l'air) de la forme $\vec{f} = -\alpha\,\vec{v}$ où α est une constante positive.

1. En appliquant la deuxième loi de NEWTON, établir l'équation du mouvement de la masse.
   N.B.: on pourra poser $\alpha = M\Gamma$.
2. Résoudre l'équation du mouvement:
   (a) dans le cas sous-amorti.
   (b) dans le cas critique.
   (c) dans le cas sur-amorti.

Problème II *(supp.)*

Soit un circuit électrique composé d'une inductance L, d'une capacité C et d'une résistance R en série.

1. Établir l'équation déterminant l'évolution temporelle de la charge Q du condensateur. Faire une analogie avec un oscillateur mécanique amorti.
2. Résoudre l'équation pour $Q(t)$ si, à $t = 0$, le condensateur porte une charge Q_0 et le courant électrique est nul:
   (a) dans le cas sous-amorti.
   (b) dans le cas critique.
   (c) dans le cas sur-amorti.

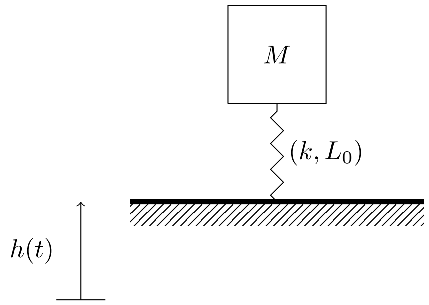
Problème III

Soit une masse M posée sur un ressort idéal sans masse, de constante de rappel k et de longueur au repos L_0, lui même posé perpendiculairement à un plan horizontal. Le plan horizontal oscille verticalement, sa hauteur au temps t étant donnée par

$$h(t) = h_0 \sin(\omega_d t). \tag{1}$$

1. Trouver l'équation du mouvement de la masse.
2. Donner la solution générale de la partie homogène de l'équation.
3. Donner une solution particulière de l'équation.

4. Donner la hauteur de la masse en fonction du temps si, à $t = 0$, la masse est immobile à une distance $L_0 - mg/k$ du plan horizontal.



Problème IV *(supp.)*
Soit un bloc de masse M libre de glisser sans frottement sur un plan horizontal, attaché de chaque côté à des ressorts idéaux sans masses, de constante de rappel k et $2k$, respectivement, et de longueur au repos a. Les extrémités de chaque ressort se déplacent horizontalement selon

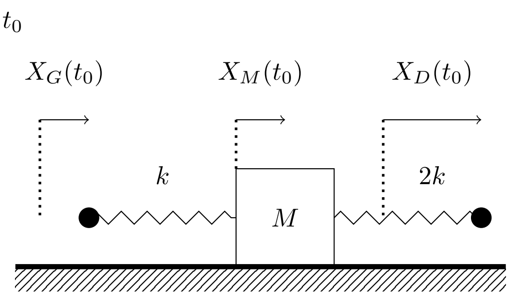
$$X_G(t) = G\cos(\omega_G t), \qquad X_D(t) = D\cos(\omega_D t). \tag{2}$$

On mesure la position du bloc, $X_M(t)$, par rapport au point d'équilibre entre les deux ressorts.

1. Donner l'équation du mouvement de la masse.
   Identifier la partie homogène de l'équation.

2. En utilisant le principe de superposition pour séparer le mouvement des deux ressorts, trouver la solution générale de l'équation du mouvement.

3. Si à $t = 0$ le bloc est immobile à son point d'équilibre, trouver la solution particulière de l'équation du mouvement correspondante.



Ondes - TD 3

Le cas échéant, et sauf mention contraire, les situations sont étudiées dans un référentiel supposé galiléen.

Problème I

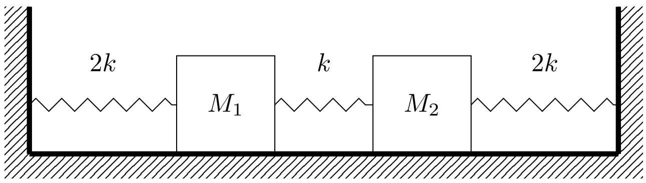
Deux masses M_1 et M_2 sont placées sur un plan horizontal et libres de se déplacer sans frottement. Elles sont reliées entres elles par un ressort idéal de constante de rappel k et de longueur au repos L_0; chacune est également reliée à un mur vertical par un ressort idéal de constante de rappel $2k$ et de longuer au repos L_0. La distance entre les deux murs est $3L_0$, et on mesure la position des blocs par rapport à leur position d'équilibre.

1. Donner les équations du mouvement de ce système sous forme matricielle. Donner l'expression des tenseurs K et M.
2. Utiliser les valeurs propres de la matrice $M^{-1}K$ pour trouver les pulsations propres du système.

On suppose maintenant que les deux masses sont identiques ($M_1 = M_2$).

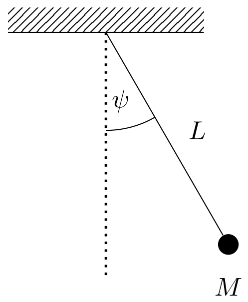
c) Donner les vecteurs propres de la matrice $M^{-1}K$ correspondant à chaque pulsation propre. Les utiliser pour trouver la solution générale du problème.

d) Si à $t = 0$ les deux masses sont au repos, mais que la masse de droite est déplacée d'une distance a vers la droite par rapport à sa position d'équilibre, alors que la masse de gauche est à sa position d'équilibre, donner la solution particulière correspondante.

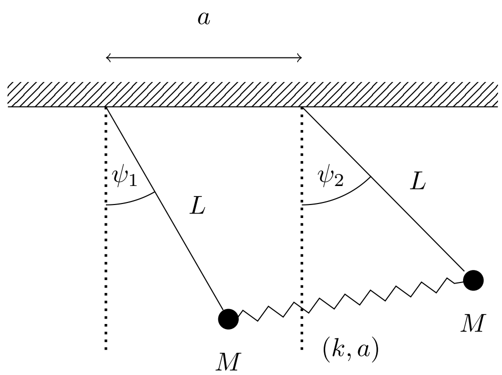


Problème II

1. En utilisant la conservation de l'énergie, établir l'équation du mouvement d'un pendule simple de longueur L et de masse M. On note ψ l'angle d'inclinaison du pendule par rapport à la verticale.
   Sous quelles conditions peut-on considérer le système comme un oscillateur harmonique? Quelle est alors la pulsation du système?



2. On couple deux pendules de longueur L et de masse M par un ressort idéal de constante de rappel k et de longueur au repos a. Les points d'attache des pendules sont situés à une distance a l'un de l'autre. On note ψ_1 et ψ_2 l'angle d'inclinaison du premier et du second pendule, respectivement. On supposera que les angles sont petits, *i.e.* $\psi_1, \psi_2 \ll 1 \, \forall \, t$.
   (a) Exprimer l'élongation du ressort en fonction des angles ψ_1, ψ_2 et des paramètres L et M. Estimer l'inclinaison du ressort.
   (b) Utiliser la deuxième loi de NEWTON pour obtenir les équations du mouvement du système sous forme matricielle.
   Donner les pulsations propres ainsi que les modes propres correspondant.

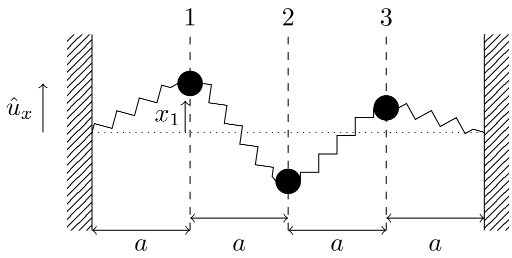


Ondes - TD 4

Le cas échéant, et sauf mention contraire, les situations sont étudiées dans un référentiel supposé galiléen.

Problème I

On considère l'agencement de masses de valeur M et de ressorts de constante de rappel k illustré ci-dessous:



Chacune des masses peut glisser verticalement le long d'une tige rigide, et elles sont séparées les unes des autres d'une distance a beaucoup plus grande que la longueur au repos des ressorts, L_0. On numérote en ordre les masses de 1 à 3, de gauche à droite, et on note x_n la hauteur de la masse numéro n par rapport à sa position d'équilibre (on néglige les effets de la gravité). On suppose de plus que chaque masse subit une force de frottement $-M\,\gamma\,\dot{x}_n\,\hat{u}_x$.

1. Montrer que les équations du mouvement de ce système peuvent être mises sous la forme
$$\ddot{\vec{X}}(t) + \Gamma\dot{\vec{X}}(t) + M^{-1}K\vec{X}(t) = 0, \tag{1}$$
avec $\vec{X}(t) = \{x_1(t), x_2(t), x_3(t)\}$ et M, Γ, et K, des matrices à déterminer.

2. Trouver $\{\vec{V}_1, \vec{V}_2, \vec{V}_3\}$ trois vecteurs propres linéairement indépendants de la matrice $M^{-1}K$.

3. Pour chaque vecteur propre $\vec{V}_i$, poser l'ansatz
$$\vec{X}(t) = f_i(t)V_i, \tag{2}$$
et montrer que c'est une solution de (1) si $f_i(t)$ est une solution de l'équation d'un oscillateur amorti:
$$\ddot{f}_i(t) + \gamma_i\dot{f}_i(t) + \omega_i^2 f_i(t) = 0, \tag{3}$$
où γ_i et ω_i sont des constantes à déterminer.

4. *(supp.)* Supposons que l'on graisse la tige du milieu mais pas les autres, de sorte que la masse numéro 2 ne subit plus aucun frottement.
Est-ce que l'ansatz (2) fonctionne toujours dans ce cas? Pourquoi?

Problème II

On considère un système dont les équations du mouvement sont de la forme

$$\ddot{\vec{X}}(t) + W\vec{X}(t) = \vec{F}(t), \tag{4}$$

où le vecteur position est $\vec{X}(t) = \{x_1(t), x_2(t)\}$, et

$$\vec{F}(t) = F_0 \begin{pmatrix} \cos(\omega_d t) \\ \sin(\omega_d t) \end{pmatrix}, \qquad W = \begin{pmatrix} \omega_1^2 & 1 \\ 0 & \omega_2^2 \end{pmatrix}. \tag{5}$$

On suppose que $\omega_1^2 \neq \omega_2^2$.

1. Trouver les modes propres de ce système.
2. Trouver la solution générale de l'équation (4).
3. Étant données les conditions initiales suivantes:

$$\vec{X}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \dot{\vec{X}}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{6}$$

   trouver la solution particulière de l'équation (4) correspondante.

On suppose maintenant que $\omega_1 = \omega_2 \equiv \omega$ et que $F_0 = 0$.

4. Trouver les vecteurs propres de la matrice W; combien y en a-t-il?
5. Pour trouver les modes propres manquants, on pose l'ansatz:

$$\vec{X}(t) = \begin{pmatrix} -\frac{t}{2} f(t) \\ \frac{df(t)}{dt} \end{pmatrix}. \tag{7}$$

   Insérer cet ansatz dans (4) pour obtenir une équation pour $f(t)$. Utiliser la solution de cette équation pour donner la solution générale des équations du mouvement.

6. *(supp.)* Alternativement, on peut utiliser l'approche suivante pour résoudre:
   (a) Montrer que pour toute matrice M t. q. $M^2 = W$, et tout vecteur constant $\vec{Y}$,

$$\vec{X}_\pm(t) = \exp\{\pm iMt\}\,\vec{Y}, \qquad \exp\{\pm iMt\} \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(\pm iMt)^n, \tag{8}$$

   sont des solutions de l'équation (4). Indice: prenez pour acquis que la somme infinie dans la définition de l'exponentielle matricielle converge uniformément (i.e. on peut faire entrer les dérivées à l'intérieur de la somme!).

   (b) Montrer que pour tout entier $n \geq 1$, et tout nombre réel $a, b \neq 0$,

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} a^n & na^{n-1}b \\ 0 & a^n \end{pmatrix}, \tag{9}$$

   et donc que

$$\exp\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}\right\} = e^a \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{10}$$

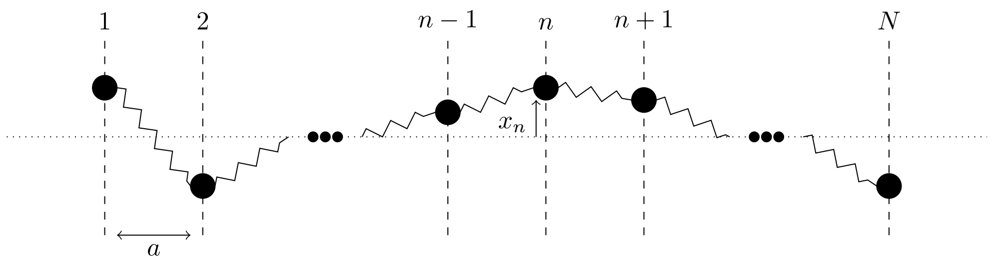
   (c) Trouver une matrice M telle que $M^2 = W$, et utiliser le résultat précédent pour donner la solution générale des équations du mouvement; est-ce bien la solution trouvée précédemment?

Ondes - TD 5

Le cas échéant, et sauf mention contraire, les situations sont étudiées dans un référentiel supposé galiléen.

Problème I

Soit une chaîne de N masses de valeur M accrochées les unes aux autres par des ressorts de constante de rappel k et de longueur au repos L_0. Chacune des masses peut glisser verticalement le long d'une tige rigide, sans frottement, mais ne peut pas se déplacer horizontalement. Les tiges sont fixées à une distance $a \gg L_0$ les unes des autres.



On numérote en ordre les masses de 1 à N, de gauche à droite, et on note x_n la hauteur de la masse numéro n par rapport à sa position d'équilibre.

1. Par un raisonnement énergétique, et en négligeant l'effet de la gravité, établir les équations du mouvement du système (on notera ω_0 la pulsation d'un oscillateur seul).

2. En utilisant l'ansatz $x_n(t) = A_n e^{i\omega t}$, exprimer les équations du mouvement comme une équation aux récurrences de la forme

$$A_{n+1} = 2\beta A_n - A_{n-1}, \qquad N-1 \geq n \geq 2. \tag{1}$$

Trouver la valeur de β ainsi que les conditions initiale ($n = 1$) et finale ($n = N$) de la récurrence.

3. (a) Poser les deux ansatz $A_n = \alpha_\pm e^{\pm in\theta}$, et montrer que l'équation (1) se réduit alors à une équation pour θ en fonction de β.

   (b) Montrer que la condition initiale de (1) impose que la solution de l'équation soit une combinaison linéaire des deux ansatz.

   (c) Montrer alors que la condition finale de (1) impose une contrainte sur la valeur de θ. En déduire les pulsations propres du système.

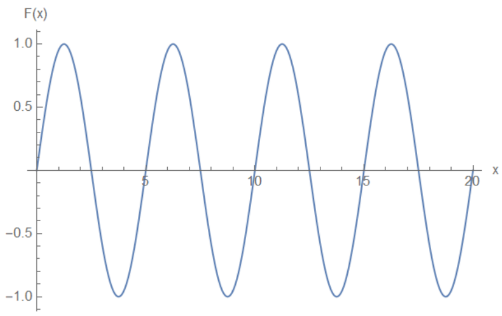
4. Combiner la solution de (1) avec les pulsations propres trouvées pour donner la solution générale du problème.

5. *(supp.)* Voici une autre façon de résoudre l'équation aux récurrences (1).
Considérer la **fonction génératrice**

$$F[t] \equiv \sum_{n=1}^{\infty} A_n t^n, \qquad A_n \equiv \left(\frac{1}{n!}\frac{\partial^n}{\partial t^n} F[n]\right)_{t=0}. \tag{2}$$

Montrer alors que $F[t]$ est une fonction rationnelle de t. Ce type d'approche est parfois utilisée pour prouver certaines propriétés des coefficients A_n sans nécessairement connaître leur forme explicite.

<u>Exercice II</u>
On considère une onde progressive périodique se déplaçant selon l'axe Ox dans la direction $x > 0$. La figure ci-dessous représente une partie de l'onde à un instant donné, en fonction de la position:



Que se passe-t-il dans les cas suivants? (expliquer et illustrer le résultat par un dessin)

1. l'amplitude et la fréquence sont doublées, mais la vitesse de phase est inchangée.

2. la fréquence et la vitesse de phase sont doublées, mais l'amplitude est inchangée.

3. la longueur d'onde et l'amplitude sont divisées par trois, et la vitesse de phase est doublée.

<u>Exercice III</u>
On considère une onde progressive monochromatique de pulsation ω_0 et de longueur d'onde λ_0 se déplaçant selon l'axe Ox. On imagine une observatrice se déplaçant selon le même axe Ox avec une vitesse $V_0 \hat{u}_x$ ($|V_0| < c$), capable de mesurer la valeur de l'onde $\phi(x,t)$ à sa position.

On suppose qu'à $t = 0$ elle mesure la valeur de l'onde comme étant un maximum, et qu'elle doit attendre un temps Δt avant de mesurer un autre maximum.

1. En supposant que l'onde et l'observatrice se déplacent toutes deux dans la même direction, exprimer Δt en termes des données du problème.
   Quelle fréquence et quelle longueur d'onde l'observatrice mesure-t-elle?

2. En supposant que l'onde et l'observatrice se déplacent dans des directions opposées, exprimer Δt en termes des données du problème.
   Quelle fréquence et quelle longueur d'onde l'observatrice mesure-t-elle?

Ondes - TD 6

Le cas échéant, et sauf mention contraire, les situations sont étudiées dans un référentiel supposé galiléen.

Problème I

La propagation d'ondes dans divers milieux est décrite par les équations différentielle suivantes[1]:

$$
\begin{array}{lll}
a) & \alpha\partial_t^2\phi(x,t) + 2\beta\partial_t\partial_x\phi(x,t) + \gamma\partial_x^2\phi(x,t) = 0, & \\
b) & \partial_t^4\phi(x,t) - \partial_x^4\phi(x,t) = 0, & \\
c) & \partial_t^2\phi(x,t) + \alpha\partial_x^4\phi(x,t) = 0, & \text{(EULER-BERNOULLI)} \\
d) & c^{-2}\partial_t^2\phi(x,t) - \partial_x^2\phi(x,t) + \dfrac{m^2c^2}{\hbar^2}\phi(x,t) = 0, & \text{(KLEIN-GORDON)} \\
e) & \partial_t\phi(x,t) - \alpha\partial_x^2\phi(x,t) = 0, & \text{(Chaleur)}
\end{array}
$$

où on a utilisé la notation $\partial_y \equiv \frac{\partial}{\partial y}$ pour $y = x, t$.

Pour chacune de ces équations, donner la relation de dispersion correspondante ainsi que les vitesses de phase et de groupe. En déduire le caractère dispersif ou non du milieu.

Problème II

On considère une corde tendue selon l'axe des x et fixée en $x = 0$ et $x = L$.
La propagation d'ondes transversales est décrite par l'équation[2]:

$$\partial_t^2\phi(x,t) - \frac{T}{4\pi\sigma}\partial_x^2\phi(x,t) - \frac{YS^2}{4\pi\sigma}\partial_x^4\phi(x,t) = 0, \tag{1}$$

où $\phi(x,t)$ est la déformation transversale de la corde, T la tension dans la corde, σ la densité linéique de masse, Y le module d'élasticité de YOUNG et S l'aire transversale de la corde.

1. Donner la relation de dispersion, ainsi que les vitesses de phase et de groupe de ces ondes.

2. Compte-tenu des conditions aux bords, montrer que la solution générale de ce système est de la forme:

$$\psi(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\alpha_n \cos(\omega_n t) + \beta_n \sin(\omega_n t)\right) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right), \tag{2}$$

   où $\omega_n \equiv \omega(n\pi/L)$.

3. Exprimer les paramètres a_n, b_n en termes des conditions initiales $\psi(x,0)$ et $\partial_t\psi(x,0)$.

4. Que deviennent les résultats précédents dans le cas d'une corde infiniment rigide (*i.e.* $Y = 0$)?

[1] c) Déformation d'une poutre fixée à une extrémité. d) Description quantique d'une particule relativiste sans spin. e) Propagation de la chaleur dans un matériel.

[2] M. PODLESAK, A.R. LEE, *Dispersion of waves in piano strings*, J. Acoust. Soc. Am. **83** (1), 1988

5. (Le Piano) La corde est immobile dans sa position d'équilibre, lorsqu'on la frappe avec un petit marteau de largeur $\epsilon \ll 1$, transférant une impulsion non nulle à une petite partie de la corde située en $x = a + \epsilon/2$. On suppose alors que

$$\partial_t \psi(x, 0) = \left\{ \begin{matrix} -u & a \leq x \leq a + \epsilon, \\ 0 & \text{sinon} \end{matrix} \right\}. \tag{3}$$

   (a) Exprimer les coefficients α_n, β_n en termes des données du problème (ne pas développer l'expression de ω_n).

   (b) Trouver une application musicale de la dépendance en a des différents coefficients; que faut-il faire pour éliminer le premier harmonique dissonant ($n = 7$)? Expliquer en faisant un dessin.

   (c) Dans le cas $a = L/2$, quels sont les harmoniques présents dans le son émis par la corde? Donner $\psi(x, t)$.

6. *(supp.)* (Le Clavecin) La même corde est à présent pincée et lâchée à $t = 0$ de manière à ce que sa vitesse initiale soit nulle, et que sa forme initiale soit donnée par

$$\psi(x, 0) = \left\{ \begin{matrix} x\frac{L-a}{a} & 0 \leq x \leq a, \\ L - x & a < x \leq L \end{matrix} \right\}. \tag{4}$$

   (a) Exprimer les coefficients α_n, β_n en termes des données du problème.

   (b) Pour le cas $p = 1, q = 3$, comparer l'amplitude des différents modes; quel mode à la plus grande amplitude?

Ondes - TD 7

Le cas échéant, et sauf mention contraire, les situations sont étudiées dans un référentiel supposé galiléen.

Problème I

On étudie la propagation d'ondes sonores dans un tuyau cylindrique rempli d'air, d'axe Ox, qui s'étend du point $x = 0$ au point $x = L$. On suppose que $P(x,t)$, la variation de la pression par rapport à la pression atmosphérique p_{atm}, obéit à l'équation suivante:

$$\frac{\rho}{\gamma\, p_{atm}} \frac{\partial^2}{\partial t^2} P(x,t) - \frac{\partial^2}{\partial x^2} P(x,t) = 0, \tag{1}$$

où ρ est la densité volumique de l'air et γ est l'indice adiabatique de l'air.

1. Donner la relation de dispersion, ainsi que les vitesses de phase et de groupe de ces ondes.

2. En supposant que le tuyau est ouvert aux deux extrémités, et donc que $P(L,t) = P(0,t) = 0\,\forall\, t$, donner les modes propres du système.
   Quelle est la longueur d'onde minimale d'une onde se propageant dans ce tube?

3. On suppose maintenant qu'un musicien souffle dans le tube à l'extrémité $x = 0$, produisant la condition
   $$P(0,t) = P_f \sin(\omega_f t), \tag{2}$$
   où ω_f n'est pas une pulsation propre du tuyau.
   Donner alors l'expression générale pour la pression dans le tuyau.

4. Que se passe-t-il dans la limite où ω_f tend vers une des pulsations propres du tuyau? Donner une interprétation physique du résultat.

Problème II

On considère un tuyau comme celui dans le problème précédent, mais qui est équipé d'un dispositif nous permettant de faire varier la longueur du tube. On suppose que le tuyau contient initialement une onde

$$\phi(x,t) = \sin(\pi(L-x)/L)\cos(\omega t), \qquad x \in [0,L]. \tag{3}$$

À $t = 0$, on allonge brutalement le tuyau, de sorte que les bords sont maintenant en $x = 0$ et $x = 2L$. Donner l'expression de l'onde $\psi(x,t)$ dans ce *nouveau* tuyau pour $t > 0$.

Problème III

On considère une corde tendue le long de l'axe des x, dont la densité linéique de masse varie selon x:

$$\mu(x) = \left\{ \begin{matrix} \mu_1 & x < x^* \\ \mu_2 & x^* \leq x \end{matrix} \right\}. \tag{4}$$

Sur chaque segment de corde, les petites déformations transversales de la corde $\psi(x,t)$ obéissent à l'équation d'onde suivante:

$$\frac{\mu(x)}{T_0} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \psi(x,t) - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi(x,t) = 0, \tag{5}$$

où $\mu(x)$ est la densité linéique de masse et T_0 la tension dans la corde.
On suppose une solution de la forme:

$$\psi(x,t) = \left\{ \begin{matrix} A_1 e^{ik_1(c_1 t - x)} + B_1 e^{ik_1(c_1 t + x)} & x < x^* \\ A_2 e^{ik_2(c_2 t - x)} + B_2 e^{ik_2(c_2 t + x)} & x^* \leq x \end{matrix} \right\}, \tag{6}$$

avec $c_j^2 = T_0/\mu_j$.

1. En utilisant la continuité des fonctions $\psi(x,t)$ et $\frac{\partial \psi(x,t)}{\partial x}$, obtenir une équation matricielle de la forme
$$M_1 \begin{pmatrix} A_1 \\ B_1 \end{pmatrix} = M_2 \begin{pmatrix} A_2 \\ B_2 \end{pmatrix}, \tag{7}$$
avec M_1, M_2 des matrices 2 par 2 à déterminer.
N.B.: poser $\alpha = e^{ik_1 y}$ et $\beta = e^{ik_2 y}$ afin de simplifier les expressions.

2. En utilisant le résultat suivant:
$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}, \tag{8}$$
calculer le produit $M_1^{-1} M_2$.

3. Pour le cas particulier $y = 0, B_2 = 0$, exprimer B_1/A_1 et A_2/A_1 en termes de la vitesse de phase sur les deux parties de la corde.

Ondes - TD 8

Problème I *(supp.)*
Soit le champ vectoriel:

$$\vec{A}(r,\theta,\phi,t) = \frac{\sin(\theta)}{r}\left[\cos(\underbrace{kr-\omega t}_{u}) - \frac{1}{kr}\sin(kr-\omega t)\right]\hat{\phi}, \tag{1}$$

où $\omega = kc$, et qui satisfait l'équation d'onde vectorielle:

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{A}(r,\theta,\phi,t) - \nabla^2\vec{A}(r,\theta,\phi,t) = 0, \tag{2}$$

où ∇^2 est le laplacien vectoriel, $\nabla^2\vec{A} = \vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}) - \vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{A})$.
On rappelle l'expression des différents opérateurs différentiels en coordonnées sphériques:

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla} f &= \frac{\partial f}{\partial r}\hat{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial\theta}\hat{\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial\phi}\hat{\phi},\\
\vec{\nabla}\cdot\vec{A} &= \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 A_r) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(A_\theta\sin\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}A_\phi,\\
\vec{\nabla}\times\vec{A} &= \frac{1}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}(A_\phi\sin\theta) - \frac{\partial}{\partial\phi}A_\theta\right)\hat{r} + \frac{1}{r}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}A_r - \frac{\partial}{\partial r}(rA_\phi)\right)\hat{\theta}\\
&\quad + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}(rA_\theta) - \frac{\partial}{\partial\theta}A_r\right)\hat{\phi}.
\end{aligned}$$

a) Calculer la divergence $\vec{\nabla}\cdot\vec{A}(r,\theta,\phi,t)$ et le rotationnel $\vec{\nabla}\times\vec{A}(r,\theta,\phi,t)$.

b) Calculer ensuite $\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}(r,\theta,\phi,t))$ et $\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{A}(r,\theta,\phi,t))$.

c) Montrer que le champ vectoriel (1) satisfait bien l'équation d'onde vectorielle (2).

Problème II
On considère un matériel de conductivité σ, de permittivité ϵ_0 et de perméabilité μ_0, sans charges ni courants libres.

a) Montrer, à partir des équations de MAXWELL, que les champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ doivent satisfaire les équations:

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{E} + \mu_0\sigma\frac{\partial}{\partial t}\vec{E} - \nabla^2\vec{E} = 0, \tag{3}$$

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{B} + \mu_0\sigma\frac{\partial}{\partial t}\vec{B} - \nabla^2\vec{B} = 0. \tag{4}$$

b) Montrer qu'une onde plane $\vec{E}(\vec{r},t) = \vec{E}_0 e^{i(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r})}$, avec $\vec{E}_0$ et $\vec{k}$ des vecteurs constants, est une solution de l'équation (3) si et seulement si:

$$\vec{k}\cdot\vec{k} = \frac{\omega^2}{c^2} - i\mu_0\sigma\omega. \tag{5}$$

c) On pose $\vec{k} = ke^{-i\frac{\phi}{2}}\hat{u}$, avec $\hat{u}$ un vecteur unitaire, k et ϕ deux nombres réels. Exprimer alors k et ϕ en fonction des données du problème.

<u>Problème III</u>

On considère une onde électromagnétique incidente sur un matériel de conductivité σ, de permittivité ϵ_0 et de perméabilité μ_0, sans charges ni courants libres. On suppose que le matériel remplit la partie $x \geq 0$ de l'espace, et que l'extérieur du matériel est vide. On suppose de plus que l'onde incidente est de la forme:

$$\vec{E} = \vec{E}_i e^{i(\omega t - \vec{k}_i \cdot \vec{r})},$$

avec le vecteur d'onde $\vec{k}_i = k_i \cos\theta \hat{u}_x + k_i \sin\theta \hat{u}_y$.

a) Soient θ_R et θ_T les angles entre l'axe des x et la direction de propagation de l'onde réfléchie et de l'onde transmise respectivement.
Exprimer θ_R et θ_T en fonction des données du problème. Montrer que si $\theta \neq 0$, alors $\theta_T \notin \mathbb{R}$.

b) En supposant que $\vec{E}_i$ soit dans le plan xy, exprimer l'amplitude de l'onde réfléchie et de l'onde transmise en fonction des données du problème.

<u>Problème IV</u>

Soit l'onde électromagnétique décrite par le champ électrique:

$$\vec{E}(x, y, z, t) = E_0 \left(\frac{\hat{x} + i\hat{y}}{\sqrt{2}} \right) e^{i(\omega t - kz)} \tag{6}$$

où $\omega = kc$.

a) Le vecteur de POYNTING $\vec{S} = \mu_0^{-1} \mathsf{Re}\{\vec{E}\} \times \mathsf{Re}\{\vec{B}\}$ décrit (entre autres) la densité d'énergie et d'impulsion transportées par l'onde.
Donner le vecteur de POYNTING pour l'onde décrite par l'équation (6).

b) Calculer la densité d'énergie électromagnétique contenue dans cette onde.

c) Comparer ces résultats avec ceux pour une onde polarisée en x, c'est à dire

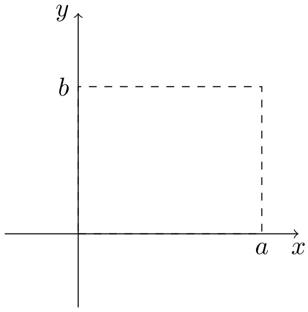
$$\vec{E}(x, y, z, t) = E_0 \hat{x} e^{i(\omega t - kz)}. \tag{7}$$

Vérifier que cette onde respecte la conservation de l'énergie électro-magnétique:

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathcal{E}_{EM} + \vec{\nabla} \cdot \vec{S} = 0. \tag{8}$$

Problème V

Un guide d'onde est un tube ou un conduit dont les parois sont considérées comme des conducteurs parfaits, utilisés pour diriger des ondes électromagnétiques dans une direction particulière, ou pour empêcher certaines ondes de traverser une ouverture. On considère ici un guide d'onde de section rectangulaire, de côtés a et b:



(9)

Sur les bords du guide, on doit avoir $\vec{B} \cdot \hat{n} = 0$, et $\vec{E} \times \hat{n} = \vec{0}$, avec $\hat{n}$ la normale à la surface. Si on suppose une onde de la forme:

$$\vec{E} = \vec{E}_0(x,y)e^{i(kz-\omega t)}, \qquad \vec{B} = \vec{B}_0(x,y)e^{i(kz-\omega t)}, \tag{10}$$

les équations de MAXWELL imposent alors:

$$E_x = \frac{i}{(\omega/c)^2 - k^2}\left(k\frac{\partial E_z}{\partial x} + \omega\frac{\partial B_z}{\partial y}\right), \qquad E_y = \frac{i}{(\omega/c)^2 - k^2}\left(k\frac{\partial E_z}{\partial y} - \omega\frac{\partial B_z}{\partial x}\right) \tag{11}$$

$$B_x = \frac{i}{(\omega/c)^2 - k^2}\left(k\frac{\partial B_z}{\partial x} - \frac{\omega}{c^2}\frac{\partial E_z}{\partial y}\right), \qquad B_y = \frac{i}{(\omega/c)^2 - k^2}\left(k\frac{\partial B_z}{\partial y} + \frac{\omega}{c^2}\frac{\partial E_z}{\partial x}\right), \tag{12}$$

ainsi que:

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = i\omega B_z, \qquad \frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} = -\frac{i\omega}{c^2}E_z. \tag{13}$$

a) En supposant que $B_z = 0$, montrer que l'équation (13) se réduit à:

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial^2 y} = (k^2 - (\omega/c)^2)E_z. \tag{14}$$

b) En utilisant la méthode de la séparation des variables, poser $E_z = F(x)G(y)$ et montrer que l'équation (14) se réduit alors au système d'équations aux dérivées ordinaires:

$$\frac{1}{F}F'' = -k_x^2, \qquad \frac{1}{G}G'' = -k_y^2. \tag{15}$$

Donner les conditions aux bords satisfaites par les fonctions F et G.

c) Montrer qu'il y a une pulsation minimale ω_c telle que si $\omega < \omega_c$ alors $\mathsf{Re}(k) = 0$, *i.e.* il n'y pas de propagation dans le guide.
Exprimer cette pulsation critique en termes des données du problème.

d) Montrer que si $\omega > \omega_c$, alors la vitesse de phase de l'onde est plus grande que la vitesse de la lumière.