Ondes - TD 8

Problème I

Soit le champs de vectoriel:

$$\vec{A}(r,\theta,\phi,t) = \frac{\sin(\theta)}{r}\left[\cos(\underbrace{kr-\omega t}_{u}) - \frac{1}{kr}\sin(kr-\omega t)\right]\hat{\phi}, \tag{1}$$

où $\omega = kc$, et qui satisfaît l'équation d'onde vectorielle:

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{A}(r,\theta,\phi,t) - \nabla^2\vec{A}(r,\theta,\phi,t) = 0, \tag{2}$$

où ∇^2 est le laplacien vectoriel, $\nabla^2\vec{A} = \vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}) - \vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{A})$. On rappelle l'expression des différentes opérateurs différentiels en coordonnées sphériques:

$$\vec{\nabla}f = \frac{\partial f}{\partial r}\hat{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial\theta}\hat{\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial\phi}\hat{\phi}, \tag{3}$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2A_r) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(A_\theta\sin\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}A_\phi, \tag{4}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{A} = \frac{1}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}(A_\phi\sin\theta) - \frac{\partial}{\partial\phi}A_\theta\right)\hat{r} + \frac{1}{r}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}A_r - \frac{\partial}{\partial r}(rA_\phi)\right)\hat{\theta} \tag{5}$$

$$+\frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}(rA_\theta) - \frac{\partial}{\partial\theta}A_r\right)\hat{\phi}. \tag{6}$$

a) Calculer la divergence $\vec{\nabla}\cdot\vec{A}(r,\theta,\phi,t)$ et le rotationnel $\vec{\nabla}\times\vec{A}(r,\theta,\phi,t)$.

b) Calculer ensuite $\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}(r,\theta,\phi,t))$ et $\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{A}(r,\theta,\phi,t))$.

c) Montrer que le champ vectoriel (10) satisfaît bien l'équation d'onde vectorielle (2).

Problème II

On considère un matériel de conductivité σ, de permittivité ϵ_0 et de perméabilité μ_0, sans charges ni courants libres.

a) Montrer, à partir des équations de Maxwells, que les champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ doivent satisfaîre les équations:

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{E} + \mu_0\sigma\frac{\partial}{\partial t}\vec{E} - \nabla^2\vec{E} = 0, \tag{7}$$

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{B} + \mu_0\sigma\frac{\partial}{\partial t}\vec{B} - \nabla^2\vec{B} = 0. \tag{8}$$

b) Montrer qu'une onde plane $\vec{E}(\vec{r},t) = \vec{E}_0 e^{i(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r})}$, avec $\vec{E}_0$, $\vec{k}$ des vecteurs constants, est une solution de l'équation (7) si et seulement

$$\vec{k}\cdot\vec{k} = \frac{\omega^2}{c^2} - i\mu_0\sigma\omega. \tag{9}$$

c) On pose $\vec{k} = ke^{-i\frac{\phi}{2}}\hat{u}$, avec $\hat{u}$ un vecteur unitaire, k, ϕ deux nombres réels. Exprimer alors k et ϕ en fonction des données du problème.

Problème III

On considère une onde électromagnétique incidente sur un matériel de conductivité σ, de permittivité ϵ_0 et de perméabilité μ_0, sans charges ni courants libres. On supposera que le matériel remplie la partie $x \geq 0$ de l'espace, et que l'extérieur du matériel est vide. On supposera de plus que l'onde incidente est de la forme

$$\vec{E} = \vec{E}_i e^{i(\omega t - \vec{k}_i\cdot\vec{r})},$$

avec le vecteur d'onde $\vec{k}_i = k_i\cos\theta\hat{u}_x + k_i\sin\theta\hat{u}_y$.

a) Soient θ_R et θ_T, les angles entre l'axe des x et la direction de propagation de l'onde réfléchie, et de l'onde transmise, respectivement. Exprimer θ_R et θ_t en fonction des données du problème. Montrer que si $\theta \neq 0$, alors $\theta_t \notin \mathbb{R}$.

b) En supposant que $\vec{E}_i$ soit dans le plan XY, exprimer l'amplitude de l'onde réfléchie et de l'onde transmise en fonction des données du problème.

Problème IV

Soit l'onde électromagnétique décrite par le champ électrique:

$$\vec{E}(x,y,z,t) = E_0\left(\frac{\hat{x}+i\hat{y}}{\sqrt{2}}\right)e^{i(\omega t - kz)} \tag{10}$$

où $\omega = kc$.

a) Le vecteur de Poynting $\vec{S} = \mu_0^{-1}\mathsf{Re}\{\vec{E}\} \times \mathsf{Re}\{\vec{B}\}$ décrit (entre autres) la densité d'énergie et d'impulsion transportées par l'onde. Donner le vecteur de Poynting pour l'onde décrite par l'équation (10).

b) Calculer la densité d'énergie électromagnétique contenue dans cette onde.

c) Comparer ces résultats avec ceux pour une onde polarisée en x, c'est à dire

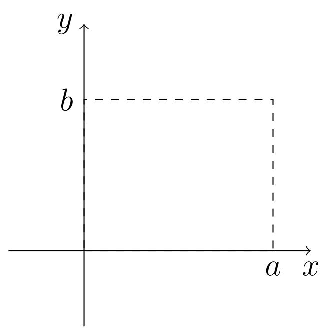
$$\vec{E}(x,y,z,t) = E_0 \hat{x} e^{i(\omega t - kz)}. \tag{11}$$

Vérifier que cette onde respecte la conservation de l'énergie électro-magnétique:

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathcal{E}_{EM} + \vec{\nabla}\cdot\vec{S} = 0. \tag{12}$$

Problème V

Un guide d'onde est un tube ou un conduit dont les parois sont considérées comme des conducteurs parfaits, utilisés pour diriger des ondes électromagnétiques dans une direction particulière, ou pour empêcher certaines ondes de traverser une ouverture. On considère ici un guide d'onde de section rectangulaire, de côté a et b:



(13)

Sur les bords du guide, on doit avoir $\vec{B}\cdot\hat{n} = 0$, et $\vec{E}\times\hat{n} = 0$, avec $\hat{n}$ la normale à la surface. Si on suppose une onde de la forme

$$\vec{E} = \vec{E}_0(x,y)e^{i(kz-\omega t)}, \qquad \vec{B} = \vec{B}_0(x,y)e^{i(kz-\omega t)}, \tag{14}$$

les équations de Maxwell imposent alors

$$E_x = \frac{i}{(\omega/c)^2 - k^2}\left(k\frac{\partial E_z}{\partial x} + \omega\frac{\partial B_z}{\partial y}\right), \qquad E_y = \frac{i}{(\omega/c)^2 - k^2}\left(k\frac{\partial E_z}{\partial y} - \omega\frac{\partial B_z}{\partial x}\right) \tag{15}$$

$$B_x = \frac{i}{(\omega/c)^2 - k^2}\left(k\frac{\partial B_z}{\partial x} - \frac{\omega}{c^2}\frac{\partial E_z}{\partial y}\right), \qquad B_y = \frac{i}{(\omega/c)^2 - k^2}\left(k\frac{\partial B_z}{\partial y} + \frac{\omega}{c^2}\frac{\partial E_z}{\partial x}\right), \tag{16}$$

ainsi que

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = i\omega B_z, \qquad \frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} = -\frac{i\omega}{c^2}E_z. \tag{17}$$

a) En supposant que $B_z = 0$, montrer alors que l'équation (17) se réduit alors à

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial^2 y} = (k^2 - (\omega/c)^2) E_z. \tag{18}$$

b) En utilisant la méthode de la séparation des variables, poser $E_z = F(x)G(y)$ et montrer que l'équation (18) se réduit alors au système d'équations aux dérivées ordinaires:

$$\frac{1}{F} F'' = -k_x^2, \qquad \frac{1}{G} G'' = -k_y^2. \tag{19}$$

Donner les conditions aux bords satisfaites par les fonctions F et G.

c) Montrer qu'il y a une pulsation minimale ω_c telle que si $\omega < \omega_c$ alors $\mathsf{Re}(k) = 0$, i.e. il n'y pas de propagation dans le guide. Exprimer cette pulsation critique en termes des données du problème.

d) Montrer que si $\omega > \omega_c$, alors la vitesse de phase de l'onde est plus grande que la vitesse de la lumière.