Ondes - TD 6

Problème I

On étudie la propagation d'ondes sonores dans un tuyau cylindrique rempli d'air, d'axe Ox, qui s'étend du point $x = 0$ où point $x = L$. On suppose que $P(x, t)$, la variation de la pression par rapport à la pression atmosphérique, obéit à l'équation suivante:

$$\frac{\rho}{\gamma p} \frac{\partial^2}{\partial t^2} P(x,t) - \frac{\partial^2}{\partial x^2} P(x,t) = 0, \tag{1}$$

où ρ est la densité volumique de l'air, γ est l'indice adiabatique de l'air, et p la pression atmosphérique.

1. Donner la relation de dispersion pour ces ondes, de même que leur vitesse de phase et de groupe.

2. En supposant que le tuyau est ouvert aux deux extrémités, et donc que $P(L, t) = P(0, t) = 0$, donner les modes propres du système. Quelle est la longueur d'onde minimale qu'une onde se propageant dans ce tube peut avoir?

3. On suppose maintenant qu'un musicien souffle dans le tube à l'extrémité $x = 0$, produisant la condition
$$P(0,t) = P_0 \sin(\omega_0 t), \tag{2}$$
où ω_0 n'est pas une pulsation propre du système. Donner alors l'expression générale pour la pression dans le tuyau.

4. Que ce passe-t-il dans la limite où ω_0 tend vers une des pulsations propres du tuyau? Donner une interprétation physique du résultat.

Problème II

On considère un tuyau comme celui dans le problème précédent, mais qui est équipé d'un dispositif nous permettant de faire varier la longueur du tube. On suppose que le tuyau contient initialement une onde

$$\phi(x,t) = \sin(\pi(L-x)/L)\cos(\omega t), \qquad x \in [0, L]. \tag{3}$$

À $t = 0$, on allonge brutalement le tuyau, de sorte que les bords sont maintenant en $x = 0$ et $x = 2L$. Donner l'expression de l'onde $\psi(x, t)$ dans ce *nouveau* tuyau pour $t > 0$.

Problème III

On considère une corde tendue le long de l'axe des x, dont la densité linéique de masse varie selon x:

$$\mu(x) = \begin{Bmatrix} \mu_1 & x < y \\ \mu_2 & y \leq x \end{Bmatrix}. \tag{4}$$

Sur chaque segment de corde, les petites déformations transversales de la corde $\psi(x, t)$ obéissent à l'équation d'onde suivante:

$$\frac{\mu(x)}{T_0} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \psi(x,t) - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi(x,t) = 0, \tag{5}$$

où $\mu(x)$ est la densité linéique de masse et T_0 la tension dans la corde. On suppose une solution de la forme

$$\psi(x,t) = \left\{ \begin{matrix} A_1 e^{ik_1(c_1 t - x)} + B_1 e^{ik_1(c_1 t + x)} & x < y \\ A_2 e^{ik_2(c_2 t - x)} + B_2 e^{ik_2(c_2 t + x)} & y \leq x \end{matrix} \right\}, \tag{6}$$

avec $c_j^2 = T_0/\mu_j$.

1. En utilisant la continuité des fonctions $\psi(x,t)$ et $\frac{\partial \psi(x,t)}{\partial x}$, obtenir une équation matricielle de la forme
$$M_1 \begin{pmatrix} A_1 \\ B_1 \end{pmatrix} = M_2 \begin{pmatrix} A_2 \\ B_2 \end{pmatrix}, \tag{7}$$
avec M_1, M_2 des matrices 2 par 2 à déterminer. (Poser $\alpha = e^{ik_1 y}$, et $\beta = e^{ik_2 y}$ afin de simplifier les expressions.)

2. En utilisant le résultat suivant:
$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}, \tag{8}$$
calculer le produit $M_1^{-1} M_2$.

3. Pour le cas particulier $y = 0, B_2 = 0$, exprimer B_1/A_1 et A_2/A_1 en termes de la vitesse de phase sur les deux parties de la corde.