Ondes - TD 6

Problème I

La propagation d'ondes dans divers milieux est décrite par les équations différentielle suivantes[1]:

$$\begin{aligned}
&a) \quad \alpha\partial_t^2\phi(x,t) + 2\beta\partial_t\partial_x\phi(x,t) + \gamma\partial_x^2\phi(x,t) = 0, \\
&b) \quad \partial_t^4\phi(x,t) - \partial_x^4\phi(x,t) = 0, \\
&c) \quad \partial_t^2\phi(x,t) + \alpha\partial_x^4\phi(x,t) = 0, && \text{(Euler-Bernouilli)} \\
&d) \quad c^{-2}\partial_t^2\phi(x,t) - \partial_x^2\phi(x,t) + \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\phi(x,t) = 0, && \text{(Klein-Gordon)} \\
&e) \quad \partial_t\phi(x,t) - \alpha\partial_x^2\phi(x,t) = 0, && \text{(Chaleur)}
\end{aligned}$$

où on a utilisé la notation $\partial_y \equiv \frac{\partial}{\partial y}$ pour $y = x, t$. Pour chacune de ces équations, donner la relation de dispersion correspondante ainsi que les vitesses de phase et de groupe. Dire si le milieu est dispersif.

Problème II

On considère une corde tendue selon l'axe des x et fixée en $x = 0$ et $x = L$. La propagation d'ondes transversales est décrite par l'équation[2]

$$\partial_t^2\phi(x,t) - \frac{T}{4\pi\sigma}\partial_x^2\phi(x,t) - \frac{YS^2}{4\pi\sigma}\partial_x^4\phi(x,t) = 0, \tag{1}$$

où $\phi(x,t)$ est la déformation transversale de la corde, Y est le module d'élasticité de Young, T est la tension dans la corde, S est l'aire transversale de la corde, et σ est sa densité linéique de masse.

1. Donner la relation de dispersion, ainsi que les vitesses de phase et de groupe de ces ondes.

2. Compte-tenu des conditions aux bords, montrer que la solution général de ce système est de la forme:

$$\psi(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\alpha_n\cos(\omega_n t) + \beta_n\sin(\omega_n t)\right)\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right), \tag{2}$$

   où $\omega_n \equiv \omega(n\pi/L)$.

3. Exprimer les paramètres a_n, b_n en termes des conditions initiales $\psi(x,0)$ et $\partial_t\psi(x,0)$.

[1] c) Déformation d'une poutre fixée à une extrémité. d) Description quantique d'une particule relativiste sans spin. e) Propagation de la chaleur dans un matériel.

[2] M. Podlesak, A.R. Lee, *Dispersion of waves in piano strings*, J. Acoust. Soc. Am. **83** (1), 1988

4. (Le Piano) La corde est immobile dans sa position d'équilibre, lorsqu'on la frappe avec un petit marteau de largeur $\epsilon \ll 1$, transférant une impulsion non nulle à une petite partie de la corde située en $x = a + \epsilon/2$. On suppose alors que

$$\partial_t \psi(x,0) = \left\{ \begin{matrix} -u & a \leq x \leq a+\epsilon, \\ 0 & \text{sinon} \end{matrix} \right\}. \tag{3}$$

   (a) Déterminer les coefficients α_n, β_n en fonctions des données du problèmes (ne pas développer l'expression de ω_n).

   (b) Trouver une application musicale de la dépendance en a des différents coefficients; que faut-il faire pour éliminer le premier harmonique dissonant ($n = 7$)? Expliquer en faisant un dessin.

   (c) Dans le cas $a = L/2$, quels sont les harmoniques présents dans le son émis par la corde? Donner $\psi(x,t)$.

5. (Le Clavecin) La même corde est à présent pincée et lâchée à $t = 0$ de manière à ce que sa vitesse initiale soit nulle, et que sa forme initiale soit donnée par

$$\psi(x,0) = \left\{ \begin{matrix} x\frac{L-a}{a} & 0 \leq x \leq a, \\ L-x & a < x \leq L \end{matrix} \right\}. \tag{4}$$

   (a) Exprimer les coefficients α_n, β_n en termes des données du problème.

   (b) Pour le cas $p = 1, q = 3$, comparer l'amplitude des différents modes; quel mode à la plus grande amplitude?