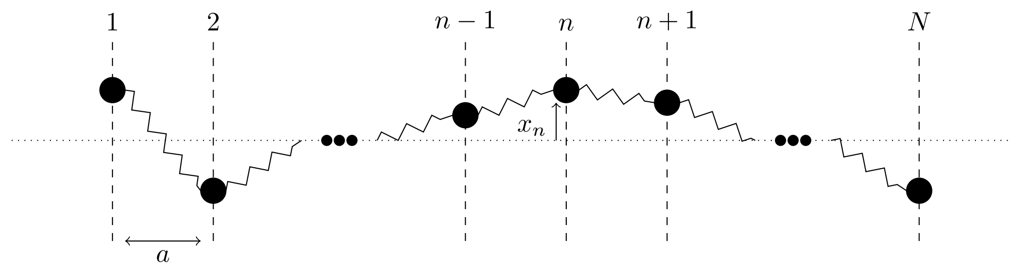
Ondes - TD 5

<u>Problème I</u>

Soit une chaîne de N masses de valeur M accrochées les unes aux autres par des ressorts de constante de rappel k et de longueur au repos L_0. Chacune des masses peut glisser verticalement le long d'une tige rigide, sans frottement, mais ne peux pas se déplacer horizontalement. Les tiges sont fixées à une distance $a \gg L_0$ les unes des autres.



On numérote en ordre les masses de 1 à N, de gauche à droite, et on note x_n la hauteur de la masse numéro n par rapport à leur position d'équilibre.

1. En utilisant l'énergie potentielle des ressorts et en négligeant l'effet de la gravité, trouver les forces agissants sur la masse n. Obtenir les équations du mouvements du système.

2. En utilisant l'ansatz $x_n(t) = A_n e^{i\lambda t}$, exprimer les équations du mouvement comme une équation aux récurrences de la forme

$$A_{n+1} = 2\beta A_n - A_{n-1}, \qquad N-1 \geq n \geq 2. \tag{1}$$

   Trouver la valeur de β ainsi que les conditions initiales (A_2, A_1) et finales (A_N) de la récurrence.

3. Poser l'ansatz $A_n = \alpha_\pm e^{\pm in\theta}$, et montrer que l'équation de récurrence (1) se réduit alors à une équation pour θ en fonction de β; montrer que les conditions initiales sur A_1, A_2 impose que la solution de l'équation soit une combinaison linéaire des deux ansatz.

4. Montrer alors que la condition finale sur A_N impose une contrainte sur la valeur de θ; utiliser ceci pour trouver les pulsations propres du système.

5. Combiner la solution de (1) avec les pulsations propres trouvées pour donner la solution générale du problème.

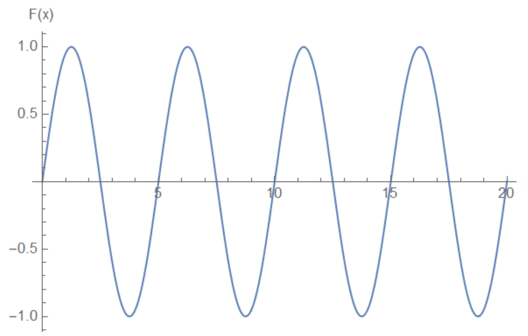
6. (Optionnel) Voici une autre façon de résoudre l'équation aux récurrence (1). Considérer la **fonction génératrice**

$$F[t] \equiv \sum_{n=1}^{\infty} A_n t^n, \qquad A_n \equiv \left(\frac{1}{n!} \frac{\partial^n}{\partial t^n} F[n] \right)_{t=0}. \tag{2}$$

Montrer alors que $F[t]$ est une fonction rationnelle de t. Ce type d'approche est parfois utiliser pour prouver certaines propriétés des coefficients A_n sans nécessairement connaître leur forme explicite.

Exercice II

On considère une onde progressive périodique se déplaçant selon l'axe Ox dans la direction $x > 0$. La figure ci-dessous représente une partie de l'onde à un instant donné, en fonction de la position: Que ce passerait-il dans les cas suivants (expliquer et illustrer le



résultat par un dessin).

1. Si l'amplitude et la fréquence sont doublées, mais la vitesse de phase reste constante.

2. Si la fréquence et la vitesse de phase sont doublées, mais que l'amplitude est inchangée.

3. Si la longueur d'onde et l'amplitude sont divisées par trois, mais que la vitesse de phase est doublée.

Exercice III

On considère une onde progressive monochromatique de pulsation ω_0 et de longueur d'onde λ_0 se déplaçant selon l'axe Ox. On imagine une observatrice se déplaçant selon le même axe Ox avec une vitesse $V_0\hat{u}_x$ ($|V_0| < c$), capable de mesurer la valeur de l'onde $\phi(x, t)$ à sa position.

On suppose qu'à $t = 0$ elle mesure la valeur de l'onde comme étant un maximum, et qu'elle doit attendre un temps Δt avant de mesurer un autre maximum.

1. En supposant que l'onde et l'observatrice se déplacent toutes deux dans la même direction, exprimer Δt en termes des données du problème. Quelle fréquence et quelle longueur d'onde l'observatrice mesure-t-elle?

2. En supposant que l'onde et l'observatrice se déplace se déplacent dans des directions opposées, exprimer Δt en termes des données du problème. Quelle fréquence et quelle longueur d'onde l'observatrice mesure-t-elle?