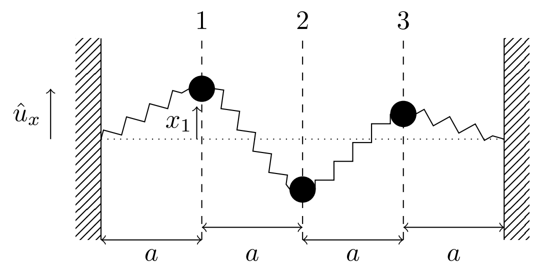
Ondes - TD 4

Exercice I

On considère l'agencement de masses de valeur M et de ressorts de constante de rappel k illustré ci-dessous:



(1)

Chacune des masses peut glisser verticalement le long d'une tige rigide, et elles sont séparées les unes des autres d'une distance a beaucoup plus grande que la longueur au repos des ressorts, L_0. On numérote en ordre les masses de 1 à 3, de gauche à droite, et on note x_n la hauteur de la masse numéro n par rapport à sa position d'équilibre (on néglige les effets de la gravité). On suppose de plus que chaque masse subit une force de frottement $-M\gamma\dot{x}_n\hat{u}_x$.

1. Montrer que les équations du mouvement de ce système peuvent être mises sous la forme
$$M\ddot{\vec{X}}(t) + \Gamma\dot{\vec{X}}(t) + K\vec{X}(t) = 0, \tag{2}$$
avec $\vec{X}(t) = \{x_1(t), x_2(t), x_3(t)\}$ et M, Γ, et K, des matrices à déterminer.

2. Trouver $\{\vec{V}_1, \vec{V}_2, \vec{V}_3\}$ trois vecteurs propres linéairement indépendants de la matrice K.

3. Pour chaque vecteur propre $\vec{V}_i$, poser l'ansatz
$$\vec{X}(t) = f_i(t)V_i, \tag{3}$$
et montrer que c'est une solution de (2) si $f_i(t)$ est une solution de l'équation d'un oscillateur amorti:
$$m\ddot{f}_i(t) + \gamma_i\dot{f}_i(t) + w_i^2 f_i(t) = 0, \tag{4}$$
où m, γ_i, w_i sont des constantes à déterminer.

4. Supposons que l'on graisse la tige du milieu mais pas les autres, de sortes que la masse numéro 2 ne subit plus aucun frottement. Est-ce que l'ansatz (3) fonctionne toujours dans ce cas? Pourquoi?

Exercice II

On considère un système dont les équations du mouvement sont de la forme
$$\ddot{\vec{X}}(t) + W\vec{X}(t) = \vec{F}(t), \tag{5}$$

où le vecteur position est $\vec{X}(t) = \{x_1(t), x_2(t)\}$, et

$$\vec{F}(t) = F_0 \begin{pmatrix} \cos(\omega_d t) \\ \sin(\omega_d t) \end{pmatrix}, \qquad W = \begin{pmatrix} \omega_1^2 & 1 \\ 0 & \omega_2^2 \end{pmatrix}. \tag{6}$$

On suppose que $\omega_1^2 \neq \omega_2^2$.

1. Trouver les modes propres de ce système.
2. Trouver la solution générale de l'équation (5).
3. Étant données les conditions initiales suivantes:

$$\vec{X}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \dot{\vec{X}}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{7}$$

   trouver la solution particulière de l'équation (5) correspondante.

On suppose maintenant que $\omega_1 = \omega_2 \equiv \omega$ et que $F_0 = 0$.

4. Trouver les vecteurs propres de la matrice W; combien est-ce qu'il y en a?
5. Pour trouver les modes propres manquant, on pose l'ansatz:

$$\vec{X}(t) = \begin{pmatrix} -\frac{t}{2} f(t) \\ \frac{df(t)}{dt} \end{pmatrix}. \tag{8}$$

   Insérer cet ansatz dans l'équation (5) pour obtenir une équation pour $f(t)$. Utiliser la solution de cette équation pour donner la solution générale des équations du mouvement.

6. Montrer que pour toute matrice M telle que $M^2 = W$, et tout vecteur constant $\vec{Y}$,

$$\vec{X}_\pm(t) = \exp\{\pm iMt\}\,\vec{Y}, \qquad \exp\{\pm iMt\} \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(\pm iMt)^n, \tag{9}$$

   sont des solutions de l'équation (5). Indice: prenez pour acquis que la somme infinie dans la définition de l'exponentielle matricielle converge uniformément (i.e. on peut faire entrer les dérivées à l'intérieur de la somme!).

7. Montrer que pour tout entier $n \geq 1$, et tout nombre réel $a, b \neq 0$,

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} a^n & na^{n-1}b \\ 0 & a^n \end{pmatrix}, \tag{10}$$

   et donc que

$$\exp\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}\right\} = e^a \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{11}$$

8. Trouver une matrice M telle que $M^2 = W$, et utiliser le résultat précédent pour donner la solution générale des équations du mouvement; est-ce que c'est bien la solution trouver précédemment?