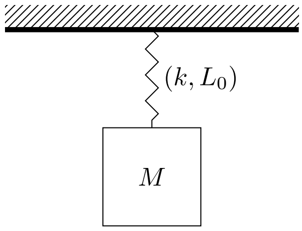
Ondes - TD 1

Le cas échéant, et sauf mention contraire, les situations sont étudiées dans un référentiel supposé galiléen.

<u>Problème I</u>

Soit un ressort idéal sans masse, de constante de rappel k et de longueur au repos L_0, suspendu verticalement par une de ses extrémités.



1. On accroche une masse M au bas du ressort et on la laisse descendre lentement jusqu'à ce qu'elle s'arrête. Quelle est la longueur du ressort à ce moment?

2. Plutôt que de laisser la masse descendre lentement, on la laisse simplement tomber.

   (a) En appliquant la deuxième loi de NEWTON, établir l'équation du mouvement de la masse.

   (b) Résoudre le problème de CAUCHY pour décrire le mouvement de la masse.

   (c) Exprimer la pulsation ω, fréquence ν et période τ temporelles des oscillations. Ces grandeurs dépendent-elles de g?

   (d) $\forall$ l'instant t, quelle est la longueur moyenne $\langle \ell(t_0) \rangle$ du ressort sur une période?

   <u>N.B.:</u> pour une fonction F de période τ:

$$\langle F \rangle (t) = \frac{1}{\tau} \int_t^{t+\tau} F(t')dt' \tag{1}$$

3. Approche énergétique

   (a) Retrouver l'équation du mouvement de la masse par un raisonnement énergétique.

   (b) Montrer que $\forall\ t$, on vérifie sur une période:

$$\langle E_c \rangle (t) = \langle E_p \rangle (t) = \frac{E}{2} \tag{2}$$

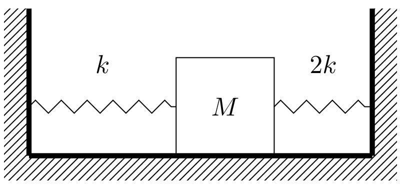
   où E_c, E_p et E sont respectivement les énergies cinétique, potentielle et mécanique de la masse (on prendra l'origine de E_c à vitesse nulle et celle de E_p à la position d'équilibre).
   Commenter.

Problème II *(supp.)*
Soit un circuit électrique consitué d'une bobine d'inductance L et d'un condensateur de capacité C en série.

1. Par analyse dimensionnelle, déterminer une grandeur assimilable à une fréquence angulaire en utilisant les quantités physiques du problème.
2. En appliquant la loi des mailles, établir l'équation déterminant l'évolution temporelle de la charge Q du condensateur.
   En déduire la pulsation ω des oscillations de $Q(t)$.
   Faire une analogie avec un oscillateur mécanique (système masse-ressort).
3. Résoudre l'équation pour $Q(t)$ si, à $t = 0$, le condensateur porte une charge Q_0 et le courant électrique est nul.
4. Approche énergétique:
   (a) Rappeler l'expression de l'énergie E_C emmagasinée dans un condensateur et de l'énergie E_L dans la bobine.
   Faire une analogie avec un oscillateur mécanique.
   (b) Retrouver l'équation déterminant l'évolution temporelle de Q par un raisonnement énergétique.
   (c) Montrer que $\forall\ t$, on vérifie sur une période:
   $$\langle E_L \rangle(t) = \langle E_C \rangle(t) = \frac{E}{2} \tag{3}$$
   où E est l'énergie électrique totale du circuit (on prendra l'origine de E_L à courant nul et celle de E_C à la charge d'équilibre).
   Commenter.

Problème III
On considère un bloc de masse M libre de glisser sans frottement sur un plan horizontal. Il est attaché de chaque côté par des ressorts idéaux sans masses, de constante de rappel k et $2k$, respectivement, eux-mêmes attachés à des surfaces verticales.

1. Calculer la pulsation du système.
2. Si la norme de la vitesse du bloc au moment où il passe au point d'équilibre est v, quelle est l'amplitude de l'oscillation du bloc?



Problème IV
Soit une particule ponctuelle soumise à un "potentiel" $V(x)$ (abus de language, il s'agit d'une énergie potentielle).
Montrer que si x_0 est un minimum de $V(x)$, alors la particule se comporte approximativement comme un oscillateur harmonique simple dans le voisinage de x_0.

Déterminer x_0 et la pulsation des oscillations dans le voisinage de x_0 pour le "potentiel" de LENNARD-JONES:

$$V(x) = 4\epsilon \left[\left(\frac{\sigma}{x}\right)^{12} - \left(\frac{\sigma}{x}\right)^{6} \right]. \tag{4}$$

où ϵ et σ sont des constantes positives.

Problème V *(supp.)*
Retrouver les identités trigonométriques suivantes en utilisant la formule d'Euler.

1. $\sin(\theta + \phi) = \sin(\theta)\cos(\phi) + \cos(\theta)\sin(\phi)$,
2. $\cos(\theta + \phi) = \cos(\theta)\cos(\phi) - \sin(\theta)\sin(\phi)$,
3. $\cos(3\theta) = 4\cos^3(\theta) - 3\cos(\theta)$,
4. $\sin(3\theta) = -4\sin^3(\theta) + 3\sin(\theta)$.