Chapitre 5
Ondes en dimension 2 et 3

Section 5.1 : ondes scalaires

Section 5.1.1 : Dimension 2

EX : les vibrations d'une peau de tambour sont décrites par l'équation :

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 F(x,y,t)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 F(x,y,t)}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 F(x,y,t)}{\partial y^2} = 0$$

Avec $c^2 = \frac{N}{\rho h}$ où ρ est la densité de masse de la membrane, h est son épaisseur et N est la tension dans la membrane.

Pour toute fonction F(z) différentielle deux fois :

$$\frac{\partial}{\partial t}\,F(ct-\alpha x-\beta y)=cF'\ \ ,\frac{\partial^2}{\partial t^2}\,F(ct-\alpha x-\beta y)=c^2F''$$
$$\frac{\partial}{\partial x}\,F(ct-\alpha x-\beta y)=-\alpha F'\ \ ,\frac{\partial^2}{\partial x^2}\,F(ct-\alpha x-\beta y)=\alpha^2F''$$
$$\frac{\partial}{\partial y}\,F(ct-\alpha x-\beta y)=-\beta F'\ \ ,\frac{\partial^2}{\partial y^2}\,F(ct-\alpha x-\beta y)=\beta^2F''$$
$$\Longrightarrow \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 F(ct-\alpha x-\beta y)}{\partial t^2}-\ \frac{\partial^2 F(ct-\alpha x-\beta y)}{\partial x^2}-\ \frac{\partial^2 F(ct-\alpha x-\beta y)}{\partial y^2}=0$$

$$\Longrightarrow (1-\alpha^2-\beta^2)F''=0$$

$\Longrightarrow$ Pour tout vecteur $\vec{k} = (k_x\,, k_y)$ de norme 1, et toute fonction dérivable deux fois
$F\left(ct - \overrightarrow{k}.\vec{r}\right)$, $\vec{r} = (x, y)$ est solution de l'équation d'onde en deux D.

$\vec{k}$: direction de propagation de l'onde.

Autre méthode : **<u>séparation des variable</u>**s

Ansatz : $\phi(x, y, t) = X(x)Y(y)T(t)$
$\Longrightarrow XY\frac{T''}{c^2} - YTX'' - XTY'' = 0$
On divise par XYT :

$$\frac{T''}{T\,c^2} = \frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y}$$

Posons $\frac{T''}{T\,c^2} = -\frac{\omega^2}{c^2} \Longrightarrow$

$\frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} = -\frac{\omega^2}{c^2} \Longrightarrow \exists\ k_x\,, k_y\,, \omega$ Tels que ${k_x}^2 + {k_y}^2 = \frac{\omega^2}{c^2}$

Et $\begin{cases} T" = -\omega^2 T \\ X" = -{k_x}^2 X \\ Y" = -{k_y}^2 Y \end{cases}$

Trois oscillateurs harmoniques ! $\Longrightarrow$

$$\phi(x,y,t) = \sum_{k_x\,,k_y} \begin{matrix} A_{k_x\,,k_y} e^{i\left(\omega t - \vec{k}.\vec{r}\right)} + B_{k_x\,,k_y} e^{i\left(\omega t + \vec{k}.\vec{r}\right)} + \\ C_{k_x\,,k_y} e^{-i\left(\omega t - \vec{k}.\vec{r}\right)} + D_{k_x\,,k_y} e^{-i\left(\omega t + \vec{k}.\vec{r}\right)} \end{matrix}$$

Relation de dispersion : $\omega^2 = c^2({k_x}^2 + {k_y}^2)$

<u>Conditions aux bords</u> :

Fig

En 1 D, on devait spécifier :

$$\begin{cases} \phi(a,t),\ \ \phi(b,t) \quad \forall t \\ \phi(x,0) \quad \forall\, x \in [a,b] \\ \partial_t \phi(x,0) \quad \forall\, x \in [a,b] \end{cases}$$

En second, le domaine est bordé par des surfaces S1 et on doit donner $\phi(x, y, t)$ pour toute paire (x, y) appartenant à S1

EX : figure

$$S_1 = \{(x, y)\ tel\ que\ |x| = a, |y| \leq b\ \ ou\ \ |y| = b, |x| \leq a\ \}$$
$$V_1 = \{(x, y, t)\ tel\ que\ |x| \leq a\ , \qquad |y| \leq b\ \}$$

$\phi(x, y, 0)\ \ et\ \partial_t \phi(x, y, 0)$ doivent être donnés sur l'intersection de V_1 avec un plan $(x, y, t_0\ )$, t_0 constant (les conditions initiales).

EX : $x'' = -k_x^2 x$,

$$x(a) = x(-a) = 0 \Longrightarrow x = A_x \sin(\frac{n\pi x}{a})$$

De même : y= $A_y \sin(\frac{m\pi y}{b})$

$$\Longrightarrow \phi(x, y, t)$$

$$= \sum_{n,m} \sin(\frac{n\pi x}{a}) \sin(\frac{m\pi y}{b})(A_{n,m}\cos(\omega_{n,m}t) + B_{n,m}\sin(\omega_{n,m}t))$$

$$\omega_{n,m} = \pi c \sqrt{\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2}}$$

Section V.1.2 Coordonnées polaires

Différents choix de coordonnées peuvent produire des conditions aux bords simples ou complexes, selon la forme de la surface délimitant le domaine de l’onde.
Par exemple en coordonnées polaires :

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad , x = rcos\theta, \qquad y = rcos\theta,$$
$$\theta = \arccos(\frac{x}{r})$$

Il est aisé de décrire les conditions sur un bord circulaire !

Que devient alors l'équation d'onde ?
Soit

$$\frac{\partial}{\partial x}=\frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{\partial \theta}{\partial x}\frac{\partial}{\partial \theta}=cos\theta\,\frac{\partial}{\partial r}-\frac{sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}=\frac{\partial r}{\partial y}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{\partial \theta}{\partial y}\frac{\partial}{\partial \theta}=sin\theta\,\frac{\partial}{\partial r}+\frac{cos\theta}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}$$

$$\Longrightarrow \frac{\partial^2}{\partial x^2}=\left(cos\theta\,\frac{\partial}{\partial r}-\frac{sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\right)^2$$

$$=cos^2\theta\,\frac{\partial^2}{\partial r^2}+cos\theta\,\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\right)-\frac{sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(cos\theta\,\frac{\partial}{\partial r}\right)+\frac{sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\right)$$

$$=cos^2\theta\,\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{cos\theta sin\theta}{r^2}\frac{\partial}{\partial \theta}-\frac{cos\theta sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial r}\frac{\partial}{\partial \theta}-\frac{cos\theta sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{sin^2\theta}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\frac{\partial}{\partial r}$$

$$+\frac{sin^2\theta}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}+\frac{cos\theta sin\theta}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$$

$$=cos^2\theta\,\frac{\partial^2}{\partial r^2}+2\,\frac{cos\theta sin\theta}{r^2}\frac{\partial}{\partial \theta}+\frac{sin^2\theta}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{sin^2\theta}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$$

$$\Longrightarrow \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$$

D'où l'équation d'onde en coordonnées polaires :

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2}\right) = 0$$

Séparation des variables :

$$\phi(r, \theta, t) = F(r, \theta)G(t) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \frac{1}{G(t)}\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 G(t)}{\partial t^2} - \frac{1}{F}\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}\right)F = 0$$

Où $\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}\right) = \Delta = laplacien$

$$\Longrightarrow \frac{\partial^2 G(t)}{\partial t^2} = -k^2 c^2 G(t)$$

$$\Delta F(r,\theta) = -k^2 F(r,\theta)$$

On sépare les variables : $F(r,\theta) = R(r)\psi(\theta)$

$$\Longrightarrow \frac{1}{R}\frac{\partial^2 R(r)}{\partial t^2} + \frac{1}{rR}\frac{\partial R}{\partial r} + \frac{1}{\psi}\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} = -k^2$$

$$\Longrightarrow \left(\frac{r^2}{R}\frac{\partial^2 R(r)}{\partial r^2} + \frac{r}{R}\frac{\partial R}{\partial r} + k^2 r^2\right) + \frac{1}{\psi}\frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} = 0$$

$$\Longrightarrow \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} = -\lambda^2 \psi,$$

$$r^2 \frac{\partial^2 R(r)}{\partial r^2} + r\frac{\partial R}{\partial r} + k^2 r^2\, R = \lambda^2 R$$

Partie angulaire

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial\theta^2} = -\lambda^2\psi \Longrightarrow \psi(\theta) = Bcos(\lambda\theta) + Csin(\lambda\theta)$$

Or on doit d'avoir $\psi(\theta) = \psi(\theta + 2\pi)$

$$\Longrightarrow \psi(0) = B = \psi(2\pi) = Bcos(2\pi\lambda) + Csin(2\pi\lambda)$$

$\Longrightarrow \lambda$ est un entier

Partie radiale

$$r^2F'' + rF' + k^2r^2\,F = \lambda^2F$$