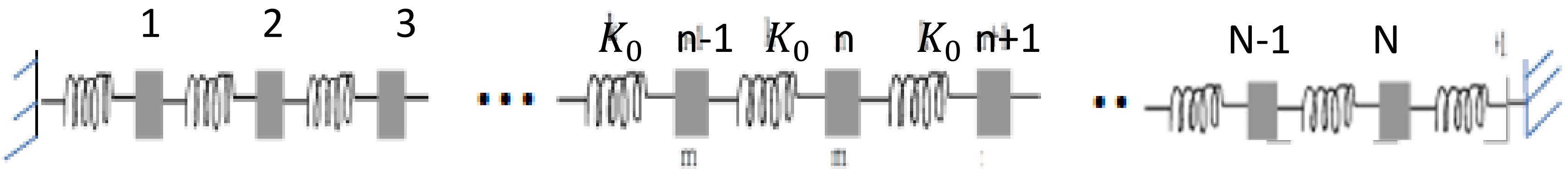
Chapitre 4 : Ondes

Section 4.1 : chaine de N oscillateurs

Une chaine est constituée de N petits blocs identiques, de même masse M, espacés de la même distance L_0 et alignés suivant la droite (Ox).

Une petite perturbation, modifie l'équilibre initial, elle se déplace de proche en proche le long de la chaine de blocs et provoque un petit déplacement de chaque bloc.

Admettons que les forces d’interaction de chaque bloc peut être limitée à ses deux voisins immédiats (n+1 et n-1 pour le bloc n)
et que ces interactions sont de même type que la tension d’un système masse-ressort de constante de raideur k.
Soit X_n la position de la masse n par rapport à sa position d’équilibre ($1 \leq n \leq N$).



Déterminons l'équation du mouvement du nième bloc :

Bilan des forces de rappel exercées par les blocs n+1 et n-1 sur le bloc n :

Projection de la force de rappel exercée par le bloc n+1 :

$\boldsymbol{f}_{\boldsymbol{n+1\to n}} = -K_0(\boldsymbol{X}_{\boldsymbol{n}} - \boldsymbol{X}_{\boldsymbol{n+1}})$

Projection de la force de rappel exercée par Le bloc n-1 :

$\boldsymbol{f}_{\boldsymbol{n-1\to n}} = -K_0(\boldsymbol{X}_{\boldsymbol{n}} - \boldsymbol{X}_{\boldsymbol{n-1}})$

La deuxième loi de Newton s'écrit :

$$\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{X}}_{\boldsymbol{n}} = \boldsymbol{f}_{\boldsymbol{n-1\to n}} + \boldsymbol{f}_{\boldsymbol{n+1\to n}}$$

Soit : $\boldsymbol{m}\ddot{\boldsymbol{X}}_{\boldsymbol{n}} = K_0(\boldsymbol{X}_{\boldsymbol{n+1}} - \boldsymbol{X}_{\boldsymbol{n}}) - K_0(\boldsymbol{X}_{\boldsymbol{n}} - \boldsymbol{X}_{\boldsymbol{n-1}})$

D'où $\ddot{\boldsymbol{X}}_{\boldsymbol{n}} + \frac{K_0}{\boldsymbol{M}}(\boldsymbol{2X}_{\boldsymbol{n}} - \boldsymbol{X}_{\boldsymbol{n-1}} - \boldsymbol{X}_{\boldsymbol{n+1}}) = \boldsymbol{0}$ posons $\frac{K_0}{\boldsymbol{M}} = \boldsymbol{\omega}^{\boldsymbol{2}}$

- ω_0 Étant la pulsation propre de chacun des N blocs identiques constituant la chaîne.
- Nous constatons que les termes $\boldsymbol{X_n}$ s’additionnent et ne s’éliminent pas.
- La solution X_n dépend de X_{n-1} et de X_{n+1} cela veut dire que le mouvement du bloc n, dépend du mouvement de ses voisins immédiats (n+1 et n-1) :
- la perturbation se déplace de proche en proche, il s’agit d’une onde mécanique, qui se propage le long de la chaîne de blocs.

Equation du mouvement du nième bloc

$$\ddot{X}_n + 2\omega^2 X_n - \omega^2(X_{n-1} + X_{n+1}) = 0$$

Equation du mouvement du premier bloc ($X_0 = 0$)

$$\ddot{X}_1 + 2\omega^2 X_1 - \omega^2(X_0 + X_1) = 0$$

Equation du mouvement du dernier bloc :

$$\ddot{X}_N + 2\omega^2 X_N - \omega^2(X_{N-1} + X_{n+1}) = 0$$

Limite continue

On s'intéresse à la limite N grand et L_0 petit, soit $F(X,t)$ telle que

$$F(nL_0,t) = X_n(t)$$

$$\Longrightarrow X_{n\pm1}(t) = F((n\pm1)L_0,t)$$

$$\approx F(nL_0,t) \pm \left.\frac{\partial F}{\partial X}\right|_{X=nL_0} L_0 \pm \frac{1}{2}\left.\frac{\partial^2 F}{\partial X^2}\right|_{X=nL_0} L_0^2$$

$$\Longrightarrow \boldsymbol{2X_n - X_{n-1} - X_{n+1}} = -\left.\frac{\partial^2 F(X,t)}{\partial X^2}\right|_{X=nL_0} L_0^2$$

$$\frac{\partial^2 F(nL_0,t)}{\partial t^2} - \omega^2 L_0^2 \left.\frac{\partial^2 F(X,t)}{\partial X^2}\right|_{X=nL_0} = 0$$

$$\Longrightarrow \frac{1}{\omega^2}\frac{\partial^2 F(X,t)}{\partial t^2} - \frac{1}{k^2}\frac{\partial^2 F(X,t)}{\partial X^2} = 0 \quad *$$

avec $\omega^2 = \frac{K_0}{M}$ $o\grave{u}$ ω $est\ la\ pulsation\ et\ k^2 = \frac{1}{{L_0}^2}$, k est le nombre d'onde (en cm -1).

$$\frac{\partial^2 F(X,t)}{\partial X^2} - \frac{k^2}{\omega^2}\frac{\partial^2 F(X,t)}{\partial t^2} = 0,$$

$\frac{k^2}{\omega^2} = \frac{1}{c^2}$ où c est la vitesse de phase

D'où l'équation d'onde : $\frac{\partial^2 F(X,t)}{\partial X^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 F(X,t)}{\partial t^2} = 0$

Solution de l'équation d'onde :

Soit G(z) une fonction, qui dépend d'une seule variable z et $\phi(x,t)$ une fonction qui dépend des deux variables $x\ et\ t$:

$$\frac{\partial}{\partial t}G\big(\phi(x,t)\big)=\dot{G}\,\frac{\partial\phi}{\partial t}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}G\big(\phi(x,t)\big)=\ddot{G}\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)^2+\dot{G}\,\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial X^2}G\big(\phi(x,t)\big)=\ddot{G}\left(\frac{\partial\phi}{\partial X}\right)^2+\dot{G}\,\frac{\partial^2\phi}{\partial X^2}$$

$$* \frac{1}{\omega^2}\frac{\partial^2 G\big(\phi(x,t)\big)}{\partial t^2} - \frac{1}{k^2}\frac{\partial^2 G\big(\phi(x,t)\big)}{\partial X^2} = 0$$

$$\Longrightarrow \frac{1}{\omega^2}\left(\ddot{G}\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)^2 + \dot{G}\,\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}\right) - \frac{1}{k^2}\left(\ddot{G}\left(\frac{\partial\phi}{\partial X}\right)^2 + \dot{G}\,\frac{\partial^2\phi}{\partial X^2}\right)$$

$$= \ddot{G}\left(\frac{1}{\omega^2}\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)^2 - \frac{1}{k^2}\left(\frac{\partial\phi}{\partial X}\right)^2\right) + \dot{G}\left(\frac{1}{\omega^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} - \frac{1}{k^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial X^2}\right)$$

Si $\phi(x,t) = \omega t \pm kX \Longrightarrow$

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\omega^2}\left(\dfrac{\partial\phi}{\partial t}\right)^2 = \dfrac{1}{k^2}\left(\dfrac{\partial\phi}{\partial X}\right)^2 = 1 \\ \dfrac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2\phi}{\partial X^2} = 0 \end{cases}$$

La solution générale de l'équation d'onde est :

$$F(X,t) = G_+(\omega t + kX) + G_-(\omega t - kX)$$

$G_+ \ et \ G_-$ sont deux fonctions C^2 arbitraires.

Rappel : la solution générale d'une équation différentielle d'ordre n contient n fonctions arbitraires.

Solution

On pose $X_n = A_n e^{i\lambda t}$

$$\ddot{X}_n + \frac{K_0}{\boldsymbol{M}}(2X_n - X_{n-1} - X_{n+1}) = 0 \Longrightarrow$$

$$-\lambda^2 A_n + 2\omega^2 A_n - \omega^2(A_{n-1} + A_{n+1}) = 0$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} A_{n+1} = 2\beta A_n - A_{n-1}, \beta = 1 - \dfrac{\lambda^2}{2\omega^2} \\ A_2 = 2\beta A_1 \end{cases}$$

$A_{N+1} = 0 \;\; et A_0 = 0$: car la chaine est fixée aux extrémités.

$\Longrightarrow A_n = \frac{\sin(n\theta)}{\sin(\theta)} A_1, \;\; \beta = \cos(\theta)$

Preuve : on pose: $\beta = \frac{q+q^{-1}}{2}$

$n = 1, \; A_1 = \frac{q-q^{-1}}{q-q^{-1}} A_1 = A_1$ vrai

$n = 2, \; A_2 = (q + q^{-1}) A_1 \, , \frac{q^2-q^{-2}}{q-q^{-1}} = \frac{(q^1+q^{-1})(q^1-q^{-1})}{q-q^{-1}} = q + q^{-1}$ vrai

Supposons le résultat vrai pour A_n et A_{n-1}

$$A_{n+1} = \left[(q+q^{-1})\frac{(q^n - q^{-n})}{q-q^{-1}} - \frac{(q^{n-1} - q^{1-n})}{q-q^{-1}}\right]A_1$$

$$\Longrightarrow \frac{A_{n+1}}{A_1} = \frac{(q^{n+1} - q^{-n-1})}{q-q^{-1}} = \frac{\sin(n\theta)}{\sin(\theta)}$$

$$\Longrightarrow X_n = \frac{\sin(n\theta)}{\sin(\theta)} A_1 e^{i\lambda t}$$

Or $X_{N+1} = 0 \Longrightarrow \sin((N+1)\theta) = 0 \Longrightarrow \theta_k = \frac{k\pi}{N+1}$

$$1-\frac{\lambda_k^2}{2\omega^2}=cos\theta_k$$

$$Or \quad cos\theta_k = 1-2sin^2\frac{\theta_k}{2})\ et \quad \theta_k=\frac{k\pi}{N+1}$$

$$\lambda_k = 2\omega\sin(\frac{k}{(N+1)}\frac{\pi}{2})$$

D’où les modes propres sont :

$\boldsymbol{X_n^k=\frac{sin(n\theta_k)}{sin(\theta_k)}e^{i\lambda_k t}}$**, k=1, …, N+1**

Pulsations propres :

$$\lambda_k = 2\omega\sin\left(\frac{k}{(N+1)}\frac{\pi}{2}\right),$$

$$\theta_k=\frac{k\pi}{(N+1)}$$

Modes propres:

$$F_k(nL_0,t) = \sin\left(k\frac{nL_0\pi}{L_0(N+1)}\right)e^{i\lambda_k t}, L = L_0(N+1)$$

$avec \quad \lambda_k = 2\omega\sin\left(\frac{k}{(N+1)}\frac{\pi}{2}\right) \approx 2\omega\frac{k}{(N+1)}\frac{\pi}{2} = \frac{k\omega\pi}{(N+1)}$ car N+1 est >>.

$$\Longrightarrow F_k(nL_0,t) = \sin\left(k\frac{nL_0\pi}{L}\right)e^{ikt\frac{\omega L_0\pi}{L_0(N+1)}}, \omega L_0 = c$$

$\Longrightarrow F_k(nL_0,t) = \sin\left(k\frac{nL_0\pi}{L}\right)e^{ict\frac{k\pi}{L}}$ car L=$L_0(N+1)$

$$\Longrightarrow \boldsymbol{F_k(x,t) = sin\left(x\frac{k\pi}{L}\right)e^{ict\frac{k\pi}{L}}}$$

$$\Longrightarrow \boldsymbol{F(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} sinx\frac{k\pi}{L}\left(A_k e^{ict\frac{k\pi}{L}} + B_k e^{-ict\frac{k\pi}{L}}\right)}$$

4-2 vitesse de groupe , vitesse de phase et conditions aux limites

Equation d'onde : $\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 F(x,t)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 F(x,t)}{\partial x^2} = 0$

D'où la relation de dispersion : $\frac{\omega^2}{c^2} - k^2 = 0 \Longrightarrow \omega^2 = k^2 c^2$

Les modes propres :

$$\boldsymbol{\phi_{j,k}^{\pm} = e^{\pm i(\omega_j(k)t - kx)}}$$

$$\phi_{j,k}^{\pm}(x,t) = \phi_{j,k}^{\pm}(x+\lambda,t) = \phi_{j,k}^{\pm}(x,t+\tau)$$

Avec $\lambda = \frac{2\pi}{K}$: longueur d'onde   et τ: période

D'autre part,

$$\phi^{\pm}_{j,k}(x+\Delta x, t+\Delta t) = e^{\pm i(\omega_j t - Kx)} e^{\pm i(\omega_j \Delta t - K\Delta x)} = \phi^{\pm}_{j,k}(x,t)$$

$\Leftrightarrow \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\omega_j}{K} =$ **vitesse de phase**

Vitesse de groupe :

Le rapport $\frac{\omega_j}{K}$ a les unités d'une vitesse et $\frac{\partial \omega_j}{\partial K}$ aussi ! c'est la vitesse de groupe, mais que mesure –t-elle ?

Pour Δk petit $\phi^{\pm}_{j,k+\Delta k}(x,t) = e^{\pm i(\omega_j(k+\Delta k)t - (k+\Delta k)x)} \simeq$

$e^{\pm i(\omega_j(k)t - kx)} e^{\pm i\Delta k(\frac{\partial \omega_j}{\partial k}t - x)}$

$\Longrightarrow$le terme $e^{\pm i\Delta k(\frac{\partial \omega_j}{\partial k}t - x)}$ correspond à une onde se déplaçant à la vitesse : $\frac{\partial \omega_j}{\partial k}$

Vitesse de groupe

Soient deux ondes progressives

$\phi_1 = \cos(\omega_1 t - k_1 x),\ \omega_i = \omega(k_i)$

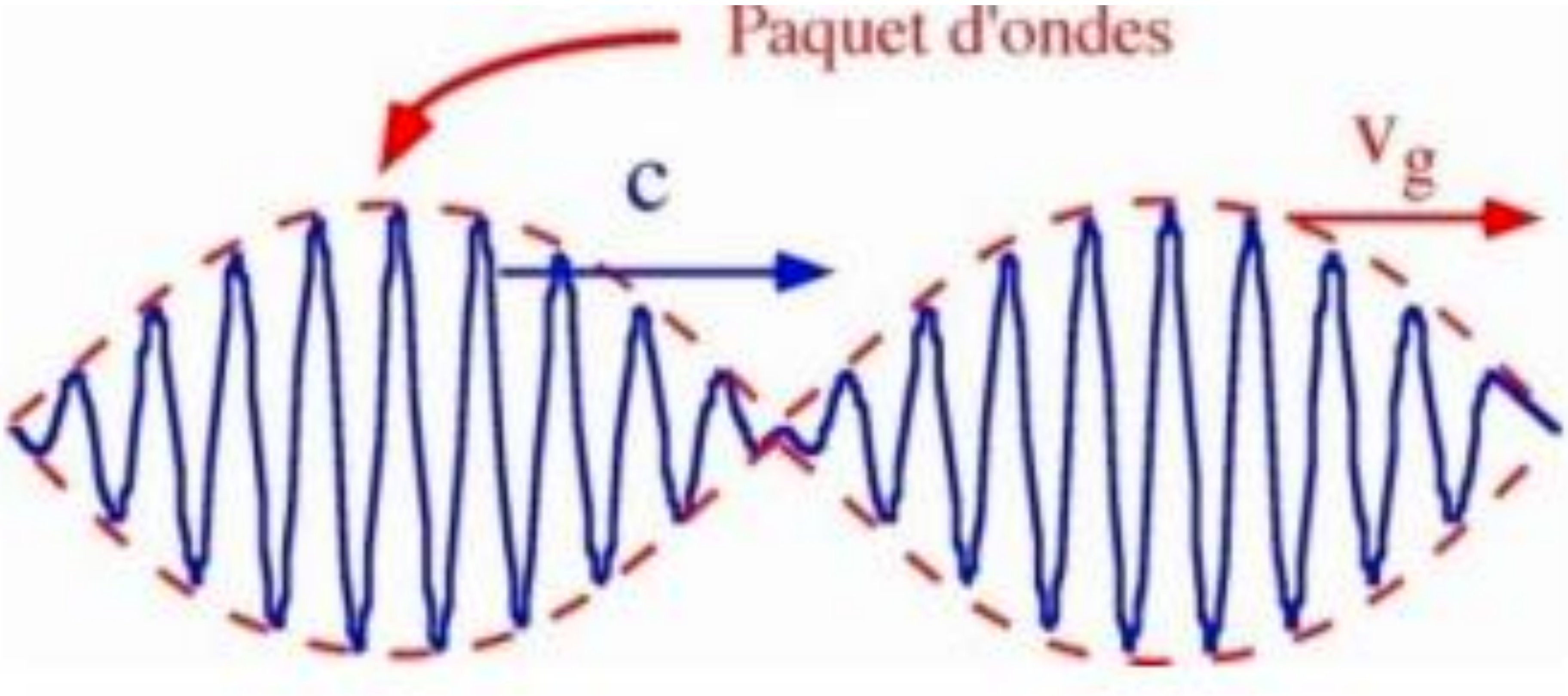
$\phi_2 = \cos(\omega_2 t - k_2 x)$

$$\Longrightarrow \phi_1 + \phi_2$$

$$= 2cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t - \frac{k_1 + k_2}{2} x\right).cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t - \frac{k_1 - k_2}{2} x.\right)$$

$$\sim \left(onde\ de\ vitesse\ \frac{\omega_1 + \omega_2}{k_1 + k_2}\right).\left(onde\ de\ vitesse\ \frac{\omega_1 - \omega_2}{k_1 - k_2}\right)$$

Ce dernier facteur est l’enveloppe


Paquet d'ondes
c
v_g

Section 4.2.1 : conditions aux bords/limites

Les ED doivent être accompagnées par des conditions aux bords /limites pour avoir une solution bien définie :

Dirichlet : $F(a,t) = \alpha,\ F(b,t) = \beta, \quad x \in [a,b]$

Neumann : $\frac{\partial F}{\partial x}(a,t) = \alpha\ ,\ \frac{\partial F}{\partial x}(b,t) = \beta$

Mixte : mélange !

Il est évident que si $F_1\ et\ F_2$ sont les solutions de l'équation différentielle linéaire telle que $\begin{cases} F_1\,(a,t) = \alpha, & F_1(b,t) = \beta \\ F_2\,(a,t) = 0, & F_2(b,t) = 0 \end{cases}$

Alors $(F_1 + F_2\,)\ est\ solution\ de\ l'ED$ avec les conditions aux bords vérifiées par les premières équations du système ci-dessus.

Commençons par l'étude des cas : $\alpha = \beta = 0$!

On considère $\phi_k(x,t) = \sum_{j=1}^{N} r_n e^{i(\omega_j t - kx)} + s_n e^{-i(\omega_j t - kx)}$

On veut résoudre pour r_n et s_n !

$$\Longrightarrow \phi_k(a,t) = e^{-ika}\sum_{j=1}^{N} r_n e^{i\omega_j t} + e^{ika}\sum_{j=1}^{N} s_n e^{-i\omega_j t} = 0$$

Equation d'onde : $\omega_1 = -\omega_2 = \omega(k)$, $(N = 2)$

$$\Longrightarrow \phi_k(a,t) = e^{i\omega t}\left(r_1 e^{-ika} + s_2 e^{ika}\right) + e^{-i\omega t}\left(r_2 e^{-ika} + s_1 e^{ika}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} r_1 = -s_2 e^{2ika} \\ r_2 = -s_1 e^{2ika} \end{cases}$$

Mais $\phi_k(b,t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} r_1 = -s_2 e^{2ikb} \\ r_2 = -s_1 e^{2ikb} \end{cases}$

$$\Longrightarrow e^{2ik(b-a)} = 1$$

$$\Longrightarrow k_n = \frac{n\pi}{b-a}, \qquad n \in Z$$

$$\Longrightarrow \phi_n = sin\left(\frac{n\pi}{b-a}(x-a)\right)\left(A_n e^{i\omega t} + B_n e^{-i\omega t}\right)$$

avec $\omega = \omega\left(\frac{n\pi}{b-a}\right) = \omega(n)$

$$\Longrightarrow F(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} Sin\left(\frac{n\pi}{b-a}(x-a)\right)\left(A_n e^{i\omega t} + B_n e^{-i\omega t}\right)$$

$$(s\acute{e}rie\ de\ Fourrier)$$

$$F(a,t) = F(b,t) = 0$$

Mais il nous manque une solution particulière de l'ED avec :

$$F(a,t) = \alpha(t)\ et\ F(b,t) = \beta(t)$$

Or de telles solutions dépendent trop de l'équation différentielle (ED) !
Par des arguments similaires, les conditions de Neumann homogène donnent :

$$F(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} Sin\left(\frac{n\pi}{b-a}(x-a)\right)\left(A_n e^{i\omega t} + B_n e^{-i\omega t}\right)$$
$$: série\ de\ Fourrier$$

$$\left.\frac{\partial F}{\partial x}\right]_{x=a} = \left.\frac{\partial F}{\partial x}\right]_{x=b} = 0$$

Section 4.2.2 : conditions initiales

En plus des bords en x, il faut donner les conditions aux bords en t (les conditions initiales) :

$$\begin{cases} F(x,0) = f(x) \\ \dfrac{\partial F(x,0)}{\partial t} = g(x) \end{cases}$$

En supposant la solution:

$$F(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} Sin\left(\frac{n\pi}{b-a}(x-a)\right)\left(A_n e^{i\omega t} + B_n e^{-i\omega t}\right)$$

On veut alors résoudre :

$$\begin{cases} (1) \quad \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} Sin\left(\frac{n\pi}{b-a}(x-a)\right)(A_n + B_n) \quad = f(x) \\ (2) \quad \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} Sin\left(\frac{n\pi}{b-a}(x-a)\right)(i\omega A_n - i\omega B_n) \quad = g(x) \end{cases}$$

Recherche des $\boldsymbol{A_n \ et \ B_n}$:

Multiplions l'équation (1) par $Sin\left(\frac{m\pi}{b-a}(x-a)\right)$:

$$(1) Sin\left(\frac{m\pi}{b-a}(x-a)\right)\sum_{n=1}^{\infty} Sin\left(\frac{n\pi}{b-a}(x-a)\right)(A_n+B_n)$$

$$= f(x) Sin\left(\frac{m\pi}{b-a}(x-a)\right)$$

Intégrons entre a et b:

$$(1) \Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b Sin\left(\frac{n\pi}{b-a}(x-a)\right) Sin\left(\frac{m\pi}{b-a}(x-a)\right)(A_n+B_n)dx$$

$$= \int_a^b Sin\left(\frac{m\pi}{b-a}(x-a)\right) f(x)dx$$

Proposition : $\int_a^b Sin\left(\frac{n\pi}{b-a}(x-a)\right) Sin\left(\frac{m\pi}{b-a}(x-a)\right) dx = \frac{(b-a)}{2}\delta_{n,m}$

$$\delta_{n,m} = \begin{cases} 1 \; si \; n = m \\ 0 \;\; sinon \end{cases}$$

(1)$\Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \quad \int_a^b Sin\left(\frac{n\pi}{b-a}(x-a)\right) Sin\left(\frac{m\pi}{b-a}(x-a)\right)(A_n + B_n)dx$

$$= \int_a^b Sin\left(\frac{m\pi}{b-a}(x-a)\right) f(x)dx$$

$$\Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(b-a)}{2}\delta_{n,m}\,(A_n + B_n) = \int_a^b Sin\left(\frac{m\pi}{b-a}(x-a)\right) f(x)dx$$

$$\Longrightarrow A_n + B_n = \frac{2}{b-a}\int_a^b Sin\left(\frac{n\pi}{b-a}(x-a)\right) f(x)dx$$

(2)

$$\Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b Sin\left(\frac{n\pi}{b-a}(x-a)\right) Sin\left(\frac{m\pi}{b-a}(x-a)\right)(i\omega_n A_n - i\omega_n B_n)dx$$

$$= \int_a^b Sin\left(\frac{m\pi}{b-a}(x-a)\right) g(x)dx$$

$$\Longrightarrow \frac{b-a}{2}\, i\omega_m (A_m - B_m) = \int_a^b Sin\left(\frac{m\pi}{b-a}(x-a)\right) g(x)dx$$

- Neumann

  En supposant : $F(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} cos\left(\frac{n\pi}{b-a}(x-a)\right)\left(A_n e^{i\omega_n t} + B_n e^{-i\omega_n t}\right)$

$$\begin{cases} F(x,0) = f(x) \\ \dfrac{\partial F(x,0)}{\partial t} = g(x) \end{cases}$$

Et en utilisant $\int_a^b cos\left(\frac{n\pi}{b-a}(x-a)\right) cos\left(\frac{m\pi}{b-a}(x-a)\right) dx = \frac{(b-a)}{2}\delta_{m,n}$

On a :

$$
\begin{cases}
A_n + B_n = \dfrac{2}{b-a}\displaystyle\int_a^b cos\left(\dfrac{n\pi}{b-a}(x-a)\right)f(x)dx \\
A_n - B_n = \dfrac{2}{b-a}\dfrac{1}{i\omega_n}\displaystyle\int_a^b cos\left(\dfrac{n\pi}{b-a}(x-a)\right)g(x)dx
\end{cases}
$$

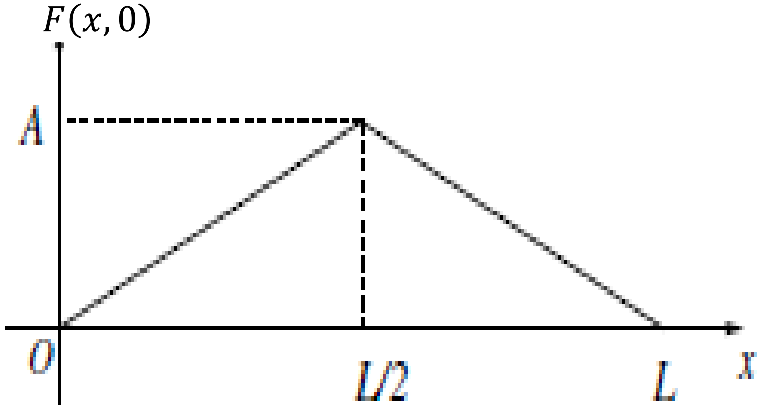
Exemple : corde pincée

On veut résoudre l'équation d'onde :

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 F(X,t)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 F(X,t)}{\partial X^2} = 0$$

Avec les conditions initiales : $F(0,t) = F(L,t) = 0$

$$(1)\quad F(x,0) = \begin{cases} x \;\; si\; x < L/2 \\ L - x \;\; si\; x \geq L/2 \end{cases}$$



$$(2)\ \frac{\partial F(x,0)}{\partial t} = 0$$

$$\Longrightarrow\ \boldsymbol{F(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\left(A_n e^{i\omega_n t} + B_n e^{-i\omega_n t}\right)}$$

$$avec\quad \omega_n = \omega\left(\frac{n\pi}{L}\right)$$

$$(2)\ \Longrightarrow A_n = B_n$$

$$(1)\ \Longrightarrow A_n + B_n = \frac{2}{L}\int_0^L sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)F(x,0)d\,x$$

$$= \frac{2}{L}\left(\int_0^{\frac{L}{2}} sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right).\,xdx + \int_{\frac{L}{2}}^{L} sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right).\,(L-x)dx\right)$$

$$\int_0^{\frac{L}{2}} sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right).xdx = -\frac{L}{n\pi}\left[cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\right]_0^{\frac{L}{2}} + \int_0^{\frac{L}{2}} cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx$$

$$= \left(\frac{L}{n\pi}\right)^2 \left[sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\right]_0^{\frac{L}{2}}$$

$$= \left(\frac{L}{n\pi}\right)^2 sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$$

……

$$A_n + B_n = \frac{8L}{n^2\pi^2} sin^2\frac{n\pi}{4} sin\frac{n\pi}{2} = 0 \quad si\ n = 2k+1$$

$$(2) \implies A_n = B_n = \frac{A_n + B_n}{2}$$

$$= \frac{4L}{(2k+1)^2\pi^2} sin^2\left(\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \sin\left(k\pi + \frac{\pi}{2}\right)$$

Avec $sin^2\left(\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$ $\;$ $et \sin\left(k\pi + \frac{\pi}{2}\right) = (-1)^k$

$$\implies A_n = B_n = \frac{2L(-1)^k}{(2k+1)^2\pi^2}\,, \qquad \mathrm{n = 2k + 1}$$

Finalement :

$$F(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4L(-1)^k}{(2k+1)^2\pi^2} \sin\left((2k+1)\frac{\pi x}{L}\right) cos\left(\omega\left(\frac{(2k+1)\pi}{L}\right)t\right)$$

Section 4.2.3 : conditions aux bords inhomogènes périodiques

Considérons le cas où

$$F(a, t) = \alpha(t) \quad , \quad F(b, t) = \beta(t)$$

et $\quad \alpha(t + \tau_a) = \alpha(t), \quad \beta(t + \tau_b) = \beta(t)$

C'àd α est périodique de période τ_a et β est périodique de période τ_b.

On applique le principe de superposition, on pose

$F = F_a + F_b$ où

$$F_a(a, t) = \alpha(t) \ , \ F_a(b, t) = 0$$

$$F_b(a, t) = 0 \quad , \ F_b(b, t) = \beta(t)$$

On commence par F_a:

On sait que la condition en b ($F_a(b,t) = 0$) implique que la solution est de la forme :

$$F_a(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} Sin(k(b-x))\left(A_k e^{i\omega_k t} + B_k e^{-i\omega_k t}\right)$$

Avec $F_a(a,t) = \alpha(t)$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} Sin\big(k(b-a)\big)\left(A_k e^{i\omega_k t} + B_k e^{-i\omega_k t}\right) \quad = \alpha(t)$$

Or , $\alpha(t+\tau_a) = \alpha(t)$

à t=0 : $\alpha(0) = \alpha(\tau_a) \Rightarrow$

$$\sum_{k=0}^{\infty} Sin\big(k(b-a)\big)(A_k + B_k) = \sum_{k=0}^{\infty} Sin\big(k(b-a)\big)\left(A_k e^{i\omega_k \tau_a} + B_k e^{-i\omega_k \tau_a}\right)$$

$$\text{Par } identificatio, ona:$$

$$A_k + B_k = A_k e^{i\omega_k \tau_a} + B_k e^{-i\omega_k \tau_a}$$

$$\Longrightarrow A_k\left(1 - e^{i\omega_k \tau_a}\right) = B_k e^{-i\omega_k \tau_a}\left(1 - e^{i\omega_k \tau_a}\right)$$

$$soit \;\; A_k = B_k e^{-i\omega_k \tau_a}$$

$$d'o\text{ù} \quad B_k = A_k e^{i\omega_k \tau_a}$$

Posons $\Gamma_k = 2A_k e^{\frac{i\omega_k \tau_a}{2}}$

$$\Longrightarrow \begin{cases} A_k = \dfrac{\Gamma_k}{2} e^{-\frac{i\omega_k \tau_a}{2}} \\ B_k = \dfrac{\Gamma_k}{2} e^{\frac{i\omega_k \tau_a}{2}} \end{cases}$$

$$\Longrightarrow A_k e^{i\omega_k t} + B_k e^{-i\omega_k t} = \frac{\Gamma_k}{2}(e^{i\omega_k\left(t-\frac{\tau_a}{2}\right)}+(e^{-i\omega_k\left(t-\frac{\tau_a}{2}\right)})$$

$$= \Gamma_k \cos(\omega_k(t - \frac{\tau_a}{2}))$$

$$\Longrightarrow \cos\left(\omega_k\left(t - \frac{\tau_a}{2}\right)\right) = \cos\left(\omega_k\left(t + \frac{\tau_a}{2}\right)\right)$$

$$car\ \alpha(t)\ est\ \text{p}\acute{e}riodique\ de\ \text{p}\acute{e}riode\ \ \tau_a$$

$$\Longrightarrow cos(\omega_k\ t)\cos\left(\omega_k \frac{\tau_a}{2}\right) + sin(\omega_k t)\sin\left(\omega_k \frac{\tau_a}{2}\right) =$$

$$cos(\omega_k t)\cos\left(\omega_k \frac{\tau_a}{2}\right) - sin(\omega_k t)\sin\left(\omega_k \frac{\tau_a}{2}\right)$$

$$\Longrightarrow \sin\left(\omega_k \frac{\tau_a}{2}\right) = 0 \Longrightarrow \omega_k = \frac{2n\pi}{\tau_a}$$

$$F_a(x,t) = \sum_n^{\infty} \frac{sin(k_n(b-x))}{sin(k_n(b-a))}(a_n cos(\omega_n t) + b_n sin(\omega_n t)) \qquad (\text{à } justifier)$$

k_n tel que $\omega_n(k_n) = \frac{2n\pi}{\tau_a}$

$$F_a(a,t) = \sum_n^{\infty} \left(a_n \cos(\frac{2n\pi}{\tau_a} t) + b_n \sin(\frac{2n\pi}{\tau_a} t) \right) = \alpha(t)$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} a_n = \dfrac{2}{\tau_a} \displaystyle\int_0^{\tau_a} \left(\cos(\frac{2n\pi}{\tau_a} t) \right) \alpha(t) dt \\ b_n = \dfrac{2}{\tau_a} \displaystyle\int_0^{\tau_a} \left(\sin(\frac{2n\pi}{\tau_a} t) \right) \alpha(t) dt \end{cases}$$

Ex 1 : $\alpha(t) = sin(\omega_a t)$

$$\Longrightarrow \tau_a = \frac{2\pi}{\omega_a}$$

$$\Longrightarrow a_n = \frac{2\omega_a}{2\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega_a}} \cos(n\omega_a t)\sin(\omega_a t)\,dt = 0$$

$$b_n = \frac{2\omega_a}{2\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega_a}} \sin(n\omega_a t)\sin(\omega_a t)\,dt = \delta_{n,1}$$

$$\Longrightarrow F_a(x,t) = \frac{sin(k(b-x))}{sin(k(b-a))}sin(\omega_a t)$$

K est tel que $\omega(k) = \omega_a$

EXE 2 : $\alpha(t) = t$

figure

$$\omega(k) = \omega_a = k,\ \tau_a = 1$$

$a_n = 2\int_0^1 \cos(2n\pi t)\,\mathrm{t}dt = 1\ si\ n = 0\ et\ 0\ si\ n \neq 0$

$$b_n = 2\int_0^1 \sin(2n\pi t)\,\mathrm{t}dt = -\frac{1}{2n\pi}$$

$$\Longrightarrow F_a(x,t) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{sin\big(\ k_n(b-x)\big)}{sin\big(\ k_n(b-a)\big)}\left(\frac{-1}{2n\pi}\right)\sin(2n\pi t)\,dt$$

Section 4.3 Ondes en milieux semi-infinis

Figure + 2 ème loi de newton

On considère une onde transversale se propageant le long d'une corde, le long de l'axe des x positifs (x=0 à l'infini).

$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 F(x,t)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 F(x,t)}{\partial x^2} = 0 \quad x > 0,\ c^2 = \frac{T_0}{\mu}$ où T_0 est la tension de la corde (en N) et μ sa masse linéique en $kg.m^{-1}$.

Figure P45

La solution générale d'une telle équation différentielle est donnée par :

$F(x,t) = G_+(ct + x) + G_-(ct - x)$, $G_+ \; et \; G_-$ sont des fonctions arbitraires où G_+ est l'onde qui se propage vers les x décroissants (vers mois l'infini) et G_- est celle qui se propage vers plus l'infini.
Admettons que G_+ est connue : une onde que nous avons générée et qui se propage vers les x<0.

<u>Pour les conditions de Dirichlet (F(0,t) = 0) on a :</u>

$$F(0,t) = G_+(ct) + G_-(ct) = 0 \Longrightarrow G_+(ct) = -G_-(ct)$$

$\Longrightarrow F(x,t) = G_+(ct + x) - G_+(ct - x)$, $G_+(ct + x)$ étant l'onde incidente et $G_+(ct - x)$ est l'onde réfléchie.
$G_-(z) = RG_+(z)$, R est le facteur de réflexion de l'onde incidente, R=-1 il s'agit d'une réflexion dure (extrémité fixe).

Pour les conditions de Neumann : ($\frac{\partial F(0,t)}{\partial x}\Big]_{x=0} = 0$) on a :

$$G'_+(ct) - G'_-(ct) = 0 \Longrightarrow G'_+(ct) = G'_-(ct)$$

$\Longrightarrow G_-(ct - x) = G_+(ct + x) +$ Constante

Cette constante est nulle si la corde est au repos.

$$\Longrightarrow R = 1 > 0 \text{: } réflexion\ dure$$

Si on suppose plutôt des conditions hybrides :

$$\alpha F(t, 0) + \beta \frac{\partial F(x,t)}{\partial x}\Big]_{x=0} = 0$$

Il est alors plus difficile de répondre. Prenons par exemple

$$G_+(z) = A_+ e^{ikz}, G_-(z) = A_- e^{ikz}$$

$$(G_+(ct + x) = A_+ e^{i(kct+kx)}, avec\ kc = \omega)$$

$$\Longrightarrow \alpha A_+ + \beta ik A_+ + \alpha A_- - \beta ik A_- = 0$$

$$A_- = A_+ \frac{\alpha + \beta ik}{-\alpha + \beta ik}$$

$$\Longrightarrow R_k = \frac{\alpha + \beta ik}{-\alpha + \beta ik} = \frac{\beta^2 k^2 - \alpha^2}{\beta^2 k^2 + \alpha^2} - 2i \frac{\alpha\beta k}{\beta^2 k^2 + \alpha^2}$$

EXE : $\alpha = \beta = 1$

$$\Longrightarrow R_k = \frac{k^2 - 1}{k^2 + 1} - 2ik\,\frac{k}{k^2 + 1}$$

$$\Longrightarrow \quad si \quad G_+(ct + x) = \sin(\omega t + kx) = Im(e^{i(kct+kx)}) \quad \omega = kc$$

$$\Longrightarrow\; G_-(z) = \frac{k^2 - 1}{k^2 + 1}\sin(kz) - 2k\,\frac{k}{k^2 + 1}\cos(kz)$$

$$G_-(ct - kx) = \frac{k^2 - 1}{k^2 + 1}\sin(\omega t - kx) - 2k\,\frac{k}{k^2 + 1}\cos(\omega t - kx)$$

Section 4.3.1 : Interfaces entre milieux semi-infinis

On considère deux milieux semi-infinis se rejoignant à une interface :

- Le domaine 1 (D1) correspond à $x \geq 0$, dans lequel les ondes se propagent à la vitesse c_1.
- Le domaine 2 (D2) correspond à $x < 0$, dans lequel les ondes se propagent à la vitesse c_2.

Les ondes F_1 et F_2 qui s'y propagent satisfont les équations d'ondes :

$$\frac{1}{{c_1}^2}\frac{\partial^2 F_1(x,t)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 F_1(x,t)}{\partial x^2} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{1}{{c_2}^2}\frac{\partial^2 F_2(x,t)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 F_2(x,t)}{\partial x^2} = 0$$

Avec $F_1(0,t) = F_2(0,t)$ et $\left.\frac{\partial F_1(x,t)}{\partial x}\right|_{x=0} = \left.\frac{\partial F_2(x,t)}{\partial x}\right|_{x=0}$

D'où $\quad F_1(x,t) = G_+^1(c_1t + x) + G_-^1(c_1t - x)$
Et $\quad F_2(x,t) = G_+^2(c_2t + x) + G_-^2(c_2t - x)$

On s'intéresse au cas particulier où $G_+^1(c_1t + x)$ est connue et $G_-^2(c_2t - x) = 0$,
c'est-à-dire que l'onde incidente qui provient de $+\infty$: $G_+^1(c_1t + x)$ est connue. Elle donne lieu :

- A une onde réfléchie (en x=0) : $G_-^1(c_1t - x)$, qui retourne vers $+\infty$
- Et une onde transmise qui se dirige vers $-\infty$: $G_+^2\,(c_2t + x)$.

Exemple : $G_+^1(z) = Ae^{ik_1z}, G_-^1(z) = A_R e^{ik_1z}$ et $G_+^2(z) = A_T e^{ik_2z}$

La continuité de l'onde en z=0 impose:

$$G_+^1(c_1t) + G_-^1(c_1t) = Ae^{i\omega_1 t} + A_R e^{i\omega_1 t} = A_T e^{i\omega_2 t}$$

$\omega_1 = c_1k_1 \ \ et \ \ \omega_2 = c_2k_2$

$$\Longrightarrow (A + A_R) = A_T e^{i(\omega_2 - \omega_1)t}$$

Les trois termes $A_R, A_T \ et \ A$ sont indépendants du temps$\Longrightarrow \omega_2 = \omega_1 \Longrightarrow A + A_R = A_T$

$$\partial_x G_+^1(c_1 t + x) + \partial_x G_-^1(c_1 t - x)\Big|_{x=0} = Aik_1 e^{i\omega_1 t} - A_R i k_1 e^{i\omega_1 t}$$

$$= \partial_x G_+^2(c_2 t + x)\Big|_{x=0} = A_T i k_2 e^{i\omega_2 t}$$

$\Longrightarrow \frac{k_1}{k_2} = \frac{A_T}{A - A_R}$ (a)

$\omega_2 = \omega_1 \Longrightarrow k_1 c_1 = k_2 c_2 \Longrightarrow \frac{k_1}{k_2} = \frac{c_1}{c_2}$ *(b)*

© $A + A_R = A_T \Longrightarrow \frac{A_T}{A} = 1 + \frac{A_R}{A}$

Les trois conditions a, b et c $\Longrightarrow$

$$\begin{cases} \boldsymbol{R} = \dfrac{A_R}{A} = \dfrac{c_2 - c_1}{c_2 + c_1} \quad est\ le\ coeff.\ de\ réflexion \\ \boldsymbol{T} = \dfrac{A_T}{A} = \dfrac{2c_2}{c_2 + c_1} \quad est\ le\ coeff.\ de\ transmission \end{cases}$$

Remarque :

Si les milieux sont dispersifs, on peut faire la même chose.

Si $c_2 > c_1$, $R > 0$ $\Longrightarrow$ c’est une réflexion molle !

Si $c_2 < c_1$, $R < 0$ $\Longrightarrow$ c’est une réflexion dure !

Section 4.3.2 : Bord inhomogène

On considère le cas d'une source immobile à l'origine, c'à d on a la condition aux bords : $F(0,t) = S(t)$

L'axe des x est considéré comme deux milieux semi-infinis, se rencontrant en x=0.

$$\Longrightarrow F(x,t) = \begin{cases} G_+^1(ct+x) + G_-^1(ct-x) & x \geq 0 \\ G_+^2(ct+x) + G_-^2(ct-x) & x < 0 \end{cases}$$

On suppose que S est la seule source d'ondes, donc pas d'ondes provenant de l'infini : $G_+^1 = G_-^2 = 0$, d'où les conditions au bord :

$G_+^2(ct) = S(t) = G_-^1(ct)$

$$\begin{cases} G_+^2(ct+x) = S(t+\frac{x}{c}) \\ G_-^1(ct-x) = S(t-\frac{x}{c}) \end{cases}$$

$$\Longrightarrow F(x,t) = \begin{cases} S\left(t+\frac{x}{c}\right) \;\; pour \;\; x<0 \\ S\left(t-\frac{x}{c}\right) \; pour \; x \geq 0 \end{cases}$$

$$F(x,t) = S(t-\frac{|x|}{c})$$

Dans le cas où la source est en mouvement, posons $F(V_s t, t) = S(t)$ où V_s est la vitesse de la source.

$$\Longrightarrow F(x,t) = \begin{cases} G_-(ct-x) \;\; si\ x \geq V_s t \\ G_+(ct+x) \;\; si\ x < V_s t \end{cases}$$

$$\Longrightarrow G_-\big((c - V_s)t\big) = S(t) = G_+\big((c + V_s)t\big)$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} G_-(ct - x) = S\left(\dfrac{ct - x}{c - V_s}\right) \\ G_+(ct + x) = S\left(\dfrac{ct + x}{c + V_s}\right) \end{cases}$$

EX $\boldsymbol{S(t) = sin(\omega_0 t)}$

onde se propageant vers les x croissants

$$\Longrightarrow G_-(ct - x) = \sin\left(\omega_0 \frac{ct - x}{c - V_s}\right)$$

$$G_-(ct - x) = \sin\left(\frac{\omega_0 t}{1 - \frac{V_s}{c}} - \frac{\omega_0 x}{c - V_s}\right)$$

$\Longrightarrow$ *onde de pulsation* $\quad \omega = \frac{\omega_0}{1-\frac{V_s}{c}}$

et de longueur d'onde $\lambda = \lambda_0(1 - \frac{V_s}{c})$

$$G_+(ct + x) = \sin\left(\omega_0 \frac{ct + x}{c + V_s}\right)$$
$$= \sin\left(\frac{\omega_0 t}{1 + \frac{V_s}{c}} + \frac{\omega_0}{c}\frac{x}{1 + \frac{V_s}{c}}\right)$$

$\Longrightarrow$ *onde de pulsation* $\quad \omega = \frac{\omega_0}{1+\frac{V_s}{c}}$ et de longueur d'onde $\lambda = \lambda_0(1 + \frac{V_s}{c})$

C'est l'effet Doppler

Remarque : $\omega_0 \lambda_0 = 2\pi c = \lambda\omega$ $\Longrightarrow$les deux ondes ont la même vitesse de phase, c.

Section 4.3.3 : interface massive

On considère deux cordes semi-infinies, de densité linéique de masse $\mu_1 et\ \mu_2$, s’étendant chacune sur l’axe des x de part et d’autre de l’origine. Au point x=0, elles sont attachées à un anneau de masse m libre de glisser sans frottements le long d’une tige verticale :

Fifure 1

On considère une onde ϕ_i arrivant de $-\infty$ (se déplace vers $+\infty$) et on veut connaitre l'onde réfléchie ϕ_r et transmise ϕ_t.
On suppose que les oscillations transversales de la corde sont dans le plan de la tige :

Figure 2 :

On suppose que $\phi_i = A_i e^{ik_1(c_1 t - x)}$, $\phi_r = A_r e^{ik_1(c_1 t + x)}$,

$$\phi_t = A_t e^{ik_2(c_2 t - x)}$$

L'onde doit être continue en x=0 :

$$A_i e^{ik_1(c_1 t)} + A_r e^{ik_1(c_1 t)} = A_t e^{ik_2(c_2 t)}$$

$$\Longrightarrow k_1 c_1 = k_2 c_2, \qquad 1 + \frac{A_r}{A_i} = \frac{A_t}{A_i}$$

Or l’anneau a une masse non nulle, la dérivée par rapport à x n’est pas nécessairement continue !!

EX : si $M \longrightarrow \infty$, l’anneau est immobile

$$\Longrightarrow \ \phi_{tot}(0,t) = 0 \Longrightarrow A_t = 0 \qquad A_r = -A_i$$

$\Longrightarrow$il nous faut l’équation du mouvement de l’anneau !

$\Longrightarrow$ on doit connaitre la force exercée par les ondes sur l’anneau.

Approche intuitive :

La déformation $\phi(x,t)$ est homogène à une distance

$$\Longrightarrow \frac{\partial\phi(x,t)}{\partial t} = \frac{distance}{temps} = vitesse$$

$$\frac{\partial\phi(x,t)}{\partial x} = \frac{distance}{distance} = expression\ sans\ unité$$

Si ϕ est petite, on s'attends à ce que $\left|\vec{F}\right|$ soit proportionnelle à ϕ

Or $\left|\vec{F}\right|$s'exprime en N soit $M.\frac{L}{T^2} =$ $(densité\ linéique)vitesse^2$

$$\Longrightarrow \vec{F} = (\alpha\mu c^2 \frac{\partial\phi(x,t)}{\partial x} + \beta\mu c \frac{\partial\phi(x,t)}{\partial t})\vec{u}_y$$

Si on considère une onde $\phi(x,t) = G_{\pm}(ct \pm x)$

$$\Longrightarrow \vec{F}_{\pm} = (\beta\mu c^2 \pm \alpha\mu c^2)G'_{\pm}\vec{u}_y = (\beta \pm \alpha)\mu c^2 G'_{\pm}\vec{u}_y$$

- $\mu c^2 \ = T_0$: tension de la corde.
- $(\beta \pm \alpha) = coef.\ sans\ unités.$
- $Z = \mu c = \frac{T_0}{c} : impédance\ de\ la\ corde.$

Considérons le cas : $\phi(x,t) = Ae^{-\frac{(ct-x)^2}{2}}$ figure 3

$$\frac{\partial\phi}{\partial x} = (ct - x)Ae^{-\frac{(ct-x)^2}{2}}$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} = -c(ct - x)Ae^{-\frac{(ct-x)^2}{2}}$$

$$\Longrightarrow \vec{F} = -Zc\frac{\partial\phi}{\partial x}\vec{u}_y$$ (fin de de cet exmple)

Dans le cas de l'anneau, on a :

$$\vec{F}_{gauche} = -Z_1 c_1 \left(\frac{\partial \phi_i}{\partial x} + \frac{\partial \phi_r}{\partial x}\right)_{x=0} . \vec{u}_y$$

$$= -ic_1 Z_1(-k_1 A_i + k_1 A_r) e^{ik_1(c_1 t)} \vec{u}_y$$

$$= -ic_1 Z_1 k_1 A_i \left(1 - \frac{A_r}{A_i}\right) e^{ik_1(c_1 t)} \vec{u}_y$$

$$\vec{F}_{droite} = -c_2 Z_2 \left(\frac{\partial \phi_t}{\partial x}\right)_{x=0} . \vec{u}_y$$

$$= ic_2 Z_2 k_2 A_t e^{ik_2(c_2 t)} \vec{u}_y$$

$$M\vec{a} = M \frac{\partial^2 \phi}{\partial^2 t} \vec{u}_y = -(k_2 c_2)^2 M A_t e^{ik_2(c_2 t)} \vec{u}_y \Longrightarrow$$

$$\vec{F}_{gauche} - \vec{F}_{droite} = M\vec{a}$$

$$\Longrightarrow -iZ_1k_1A_ic_1\left(1-\frac{A_r}{A_i}\right)-ic_2Z_2k_2A_t=-(k_2c_2)^2MA_t$$

Avec $\frac{A_r}{A_i}=R,\ A_t=TA_i\,,k_2c_2=\omega \quad \Longrightarrow$

$$(1-R)-\frac{c_2Z_2k_2}{c_1Z_1k_1}T=-i\frac{\omega^{\,2}}{Z_1k_1}MT\ \ ,car\,1-R=2-T$$

$$\Longrightarrow T=\frac{2}{1+\frac{c_2Z_2k_2}{c_1Z_1k_1}+i\frac{\omega^{\,2}M}{Z_1k_1}}\quad,\qquad R=\frac{1-\frac{c_2Z_2k_2}{c_1Z_1k_1}-i\frac{\omega^{\,2}M}{c_1Z_1k_1}}{1+\frac{c_2Z_2k_2}{c_1Z_1k_1}+i\frac{\omega^{\,2}M}{c_1Z_1k_1}}$$

Remarque :

On peut ajouter un terme $(\alpha\frac{\partial\phi}{\partial t})$ à la force, sans changer les équations du mouvement :

Si $\vec{F} = \left(\alpha\frac{\partial\phi}{\partial t} - Z\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)\vec{u}_y \Longrightarrow$

$iZ_1k_1c_1A_i(1-R) + i\omega\alpha(A_i + A_r) - (ic_2Z_2k_2A_t + i\omega A_t)$=…

Section 4.4 : Ondes et énergie

On considère les oscillations transversales d'une corde de densité linéique de masse μ sous une tension T_0.
On se propose de déterminer la quantité d'énergie transportée par de telles ondes.
L'énergie est homogène à :

$E \propto masse(vitesse)^2 \Longrightarrow$

La densité linéique d'énergie cinétique est donnée par:

$$\varepsilon_c : \propto (\text{densité linéique } de\ masse)(vitesse)^2$$

Posons la densité d’énergie sous la forme :

$$\varepsilon = \alpha\mu Réel\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)^2 + \beta\mu c^2 Re\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2 + \gamma\mu c Réel\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right) Réel\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)$$

$$\varepsilon = 2\alpha\varepsilon_{cinet} + 2\beta\varepsilon_{pot} + \gamma\mu c(?\,)$$

Signification du terme $\gamma\mu c(?\,)$

On a vu que $-Z\frac{\partial\phi}{\partial x}$ = force exercée par la corde$\Longrightarrow$

$$\gamma\mu c\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right) = -\gamma\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)\left(-Z\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)$$

Expression où $\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)$ est une vitesse et $\left(-Z\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)$ est une force

Or force x vitesse = puissance

$\Longrightarrow P(x,t) = -Z\left(\frac{\partial \phi}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)$, on ne considère que la partie réelle de ϕ.

$$\varepsilon = \frac{Z}{2c}\left(\frac{\partial \phi}{\partial t}\right)^2 + \frac{cZ}{2}\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)^2$$

Le premier terme est égal à l'énergie cinétique et le second terme est égal à l'énergie potentielle.

EX : $\phi(x,t) = Asin(\omega t \pm kx), \omega = ck$

$$\varepsilon_{cinet} = \frac{Z}{2c^2}(-\omega Acos(\omega t \pm kx))^2$$

$$\varepsilon_{pot} = \frac{Z}{2}(\pm kAcos(\omega t \pm kx))^2 = \varepsilon_{cinet}$$

$$P(x,t) = -Z\big(\omega Acos(\omega t \pm kx)\big)\big(\pm kAcos(\omega t \pm kx)\big)$$

$$= \pm Z\frac{\omega^2}{c}(cos^2(\omega t \pm k)A^2 = \pm\varepsilon c$$

$$P > 0 \ \ onde\ vers\ x > 0$$

$$P < 0 \ \ onde\ vers\ x < 0$$

<u>Section 4.5 : Ondes vectorielles –Les ondes électromagnétiques (OE)</u>

Les OE sont des ondes vectorielles $(\overrightarrow{E},\ \vec{B})$

<u>I-Introduction:</u>

L'électromagnétisme est fondée sur les quatre équations de Maxwell et la force de Lorentz**.**

Le champ électromagnétique est solution des quatre équations locales ci-dessous dont la justification, l'interprétation et le contenu physique feront l'objet de ce paragraphe.

Les quatre équations de Maxwell :

$$\overrightarrow{Rot}\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \qquad \overrightarrow{Rot}\vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t},$$

$$div\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad et \quad div\vec{B} = \vec{0}$$

Sur le plan historique, chacune de ces quatre équations a été étudiée séparément et a permis de rendre compte d’un phénomène physique donné.

Maxwell a eu l’idée de les considérer comme un ensemble indissociable.

Constantes et unités

μ_0 est la perméabilité magnétique, elle caractérise la faculté d'un matériau à modifier un champ magnétique.

ε_0 est la permittivité du vide.

$\boldsymbol{c} = \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}}$ est la vitesse de la lumière dans le vide

Obtention des équations de propagation du champ EM :

On calcule le rotationnel de l'équation de Maxwell-Faraday :

$$\overrightarrow{Rot}\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \Longrightarrow \overrightarrow{Rot}\overrightarrow{Rot}\vec{E} = -\overrightarrow{Rot}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = -\frac{\partial\overrightarrow{Rot}\vec{B}}{\partial t}$$

Or $\overrightarrow{Rot}\overrightarrow{Rot} = \overrightarrow{grad}div - \Delta$

$avec$

$$\overrightarrow{Rot}\vec{B} = \mu_0\vec{j} + \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} \ et\ div\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\Longrightarrow \overrightarrow{grad}\frac{\rho}{\varepsilon_0} - \Delta\vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t}(\mu_0\vec{j} + \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t})$$

Soit, finalement : $\Delta\vec{E} - \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = \frac{1}{\varepsilon_0}\overrightarrow{grad}\ \rho + \mu_0\frac{\partial\vec{j}}{\partial t}$

C'est l'équation de propagation du champ électrique.

Pour la propagation du champ magnétique on a:

M.A : $\overrightarrow{Rot}\vec{B} = \mu_0\vec{J} + \varepsilon_0\mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

On applique l'opérateur rotationnel à M.A :

$$\overrightarrow{Rot}\left(\overrightarrow{Rot}\vec{B}\right) = \overrightarrow{grad}\left(div\vec{B}\right) - \Delta\vec{B}$$

$$= \mu_0\,\overrightarrow{Rot}\vec{J} + \varepsilon_0\mu_0 \frac{\partial}{\partial t}\left(\overrightarrow{Rot}\vec{E}\right)$$

Or $\overrightarrow{Rot}\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

d'où l'équation de propagation du champ magnétique :

$$\Delta\vec{B} - \varepsilon_0\mu_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = -\mu_0\overrightarrow{Rot}\vec{J}$$

Avec $\overrightarrow{Rot}\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

d’où l’équation de propagation du champ magnétique :

$$\Delta\vec{B} - \varepsilon_0\mu_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = -\mu_0 \overrightarrow{Rot}\vec{j}$$

2) cas particulier de la propagation du champ électromagnétique dans le vide sans charges ni courants :

$\rho = 0 \;\; et \;\; \vec{j} = \vec{0}$ d’où :

$\Delta\vec{E} - \varepsilon_0\mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0$

et

$\Delta\vec{B} - \varepsilon_0\mu_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = 0$

Exemple : cas d'une onde plane- Structure de l'onde plane uniforme

$\vec{E} = \vec{E}_0 expi(\omega t - \vec{k}\vec{r})$ et $\vec{B} = \vec{B}_0 expi(\omega t - \vec{k}\vec{r})$

L'onde plane progressive sinusoïdale doit également satisfaire le théorème de Gauss.
En absence de charges électriques $\rho = 0$

On montre pour une onde plane progressive sinusoïdale :

$$\vec{\nabla}\vec{E} = -i\vec{k}\,\vec{E} = 0$$

Soit encore $\overrightarrow{k}.\vec{E} = 0$:

ce qui revient à dire que le champ électrique $\vec{E}$ est perpendiculaire à la direction de propagation donnée par le vecteur d'onde $\overrightarrow{k}$.
Le champ électrique est dit transversal.

L'onde plane progressive sinusoïdale doit également satisfaire l'équation de Maxwell-Faraday :

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

On montre pour une onde progressive sinusoïdale :

$$\vec{\nabla} = -i\vec{k}$$

d 'où $-\mathrm{i}\vec{\mathrm{k}} \wedge \vec{\mathrm{E}} = = -\mathrm{i}\omega\vec{\mathrm{B}}$

On en déduit le champ magnétique

$$\vec{B} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega} \quad \boldsymbol{et} \quad \boldsymbol{\omega^2 = c^2 k^2}$$

Les propriétés du produit vectoriel, nous permettent de déduire que :

- Le champ magnétique est perpendiculaire au plan formé par les vecteurs $(\vec{k}, \overrightarrow{E})$.

- Le champ magnétique $\vec{B}$ d'une onde plane progressive (OPP) est transversal, c'est-à-dire perpendiculaire à la direction de propagation.

- Le trièdre $(\vec{E}, \overrightarrow{B}\ , \vec{k}\ )$ est un trièdre direct.

Section 4-5-1 : Polarisation

$$\Delta\vec{E} - \varepsilon_0\mu_0 \frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = 0,\ \ \Delta\vec{B} - \varepsilon_0\mu_0 \frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2} = 0 \quad \text{et} \quad \vec{\nabla}\wedge\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$

Considérons une OE plane (OEP) se propageant suivant les z croissants :

$\vec{E} = \vec{E}_0 expi(\omega t - \vec{k}\vec{r})$ et $\vec{B} = \vec{B}_0 expi(\omega t - \vec{k}\vec{r})$

L'équation de Maxwell-Gauss dans le vide : et $\vec{\nabla}.\vec{E} = 0 \rightarrow \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0$

$\frac{\partial E_z}{\partial z} = -ik\left(\vec{E}_0\vec{u}_z\right) expi(\omega t - kz) = 0 \rightarrow \vec{k}\vec{E}_0 = 0 \quad \vec{k} = k\vec{u}_z \Rightarrow \vec{E}_0$ est dans le plan XY

$\Longrightarrow$ Une onde générique s'écrit comme une superposition arbitraire de :

- Une onde polarisée suivant $\vec{u}_x$: $\vec{u}_x\ expi(\omega t - kz)$
  et
- Une onde polarisée suivant $\vec{u}_y$: $\vec{u}_y\ expi(\omega t - kz)$

De façon générale :

- $\vec{E}_{CD} = (\vec{u}_x + i\vec{u}_y)\ expi(\omega t - kz)$ Circulaire droite
- $\vec{E}_{CG} = (\vec{u}_x - i\vec{u}_y)\ expi(\omega t - kz)$ Circulaire gauche

Application : Lunettes 3D

Les deux composantes d’une onde lumineuse sont indépendantes

$\Longrightarrow$ On peut projeter une image différente selon chaque polarisation,
puis mettre un filtre ne laissant passer qu’une seule image sur chaque œil.

Section 4-5-2 : Energie/ Impulsion

ε_{em} = densité d'énergie électrique + densité d'énergie magnétique
Considérons dans le milieu, un volume   limité par une surface (*S*).

$$\varepsilon_{em} = \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{\varepsilon_0 ReE^2} + \frac{\boldsymbol{ReB^2}}{\boldsymbol{\mu_0}}\right)$$

On peut comparer avec l'expression de l'énergie, d'une onde sur une corde

$\varepsilon = \frac{Z}{2c}\left(\frac{\partial \phi}{\partial t}\right)^2 + \frac{cZ}{2}\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)^2$ (slide 64)

Le premier terme est égal à l'énergie cinétique et le second terme est égal à l'énergie potentielle.

$$\begin{cases} E_{cin.} = \dfrac{Z}{2}\left(\omega\cos(\omega t \pm Kx)\right)^2 A^2 . \\ \text{et} \\ E_{pot.} = \dfrac{Z}{2} c \left(\left(\pm K\cos(\omega t \pm Kx)\right)\right)^2 = E_{cin.} \end{cases}$$

$$(\pm K)^2 = \frac{\omega^2}{c^2}$$

$$\begin{cases} E_{cin.} = \dfrac{Z}{2c}\left(\omega\cos(\omega t \pm Kx)\right)^2 A^2 . \\ \text{et} \\ E_{pot.} = c\dfrac{Z}{2}\left(\pm K\cos(\omega t \pm Kx)\right)^2 A^2 = E_{cin.} \end{cases}$$

$$(\pm K)^2 = \frac{\omega^2}{c^2}$$

La puissance:

$$P(x,t) = -Z\left(\omega\cos(\omega t - Kx)\right)\left(\pm K\cos(\omega t - Kx)\right)A^2$$

$$= \pm Z\,\frac{\omega^2}{c}\cdot\cos^2(\omega t - Kx)\cdot A^2$$

si $P > 0 \Rightarrow$ propagation de l'onde vers les x croissants.

si $P < 0 \Rightarrow$ Propagation vers $x \downarrow$

Le potentiel vecteur $\vec{A}$ est par définition donné par la relation : $\vec{B} = \vec{Rot}\,\vec{A}$

$\vec{B} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A}$ et le champ électrique global est donné par

$$\boxed{\vec{E} = -\vec{grad}\,V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}}$$

Équation de conservation de l'énergie : $\boxed{\frac{\partial \mathcal{E}_{em}}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{\Pi} = 0}$

Pour le volume V :

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t} \int_V \mathcal{E}_{em} \, d\tau = - \oint_S \vec{\Pi} \cdot \vec{dS}}$$

IV.5.3 : Milieux dispersifs

Équations de propagation du champ électromagnétique dans un conducteur de conductivité σ :

① $$\varepsilon\mu \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} + \mu\sigma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \Delta \vec{E} = \vec{0}$$

② $$\varepsilon\mu \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} + \mu\sigma \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \Delta \vec{B} = \vec{0}$$

on pose $\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\omega t - \vec{K}\vec{r})}$

$\vec{K}.\vec{r} = \vec{r}.\vec{K} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} K_x \\ K_y \\ K_z \end{pmatrix} = xK_x + yK_y + zK_z$

on remplace $\vec{E}$ dans l'équation (1) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \vec{K}.\vec{K} = \varepsilon\mu\omega^2 - i\mu\sigma\omega$

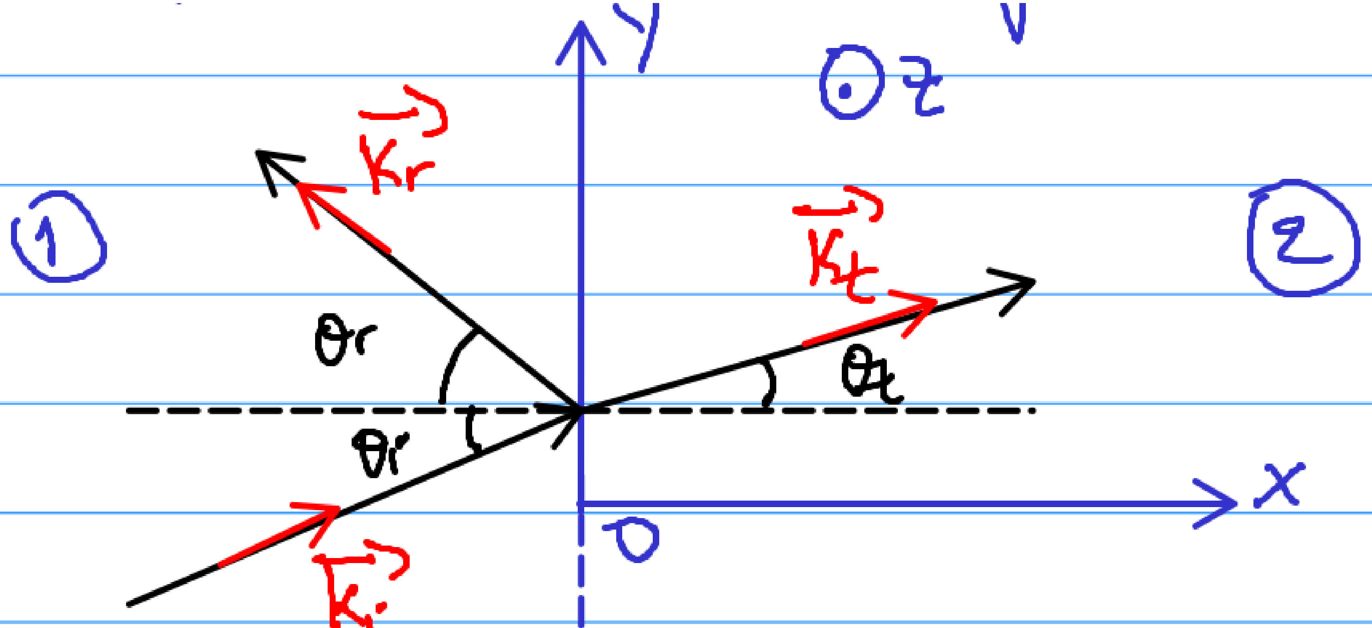
ω est réel $\Rightarrow$ K est complexe

$\Rightarrow$ propagation de l'onde avec atténuation.

IV-5-4 : Interfaces

soit une O.E se propageant entre deux milieux diélectriques ($\sigma = 0$), séparés par une interface.

soit le plan yOz cette interface



$$\mu = \begin{cases} \mu_1 & x < 0 \\ \mu_2 & x > 0 \end{cases} \qquad \varepsilon = \begin{cases} \varepsilon_1 & x < 0 \\ \varepsilon_2 & x > 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{E} = \begin{cases} \vec{E_i} e^{i(wt - \vec{K_i} \cdot \vec{r})} + \vec{E_r} e^{i(wt - \vec{K_r} \cdot \vec{r})} & \text{si } X < 0 \\ \vec{E_t} e^{i(wt - \vec{K_t} \cdot \vec{r})} & \text{si } X > 0 \end{cases}$$

Relation de dispersion : $K_i = K_r = K_t \dfrac{c_2}{c_1}$ avec $\vec{K_i} = k_i \vec{u_i}$

Conditions aux bords :

Discontinuité de la composante normale de $\vec{E}$: $\varepsilon_1 E_1^{\perp} = \varepsilon_2 E_2^{\perp}$ (a)

Continuité de la composante normale de $\vec{B}$: $B_1^{\perp} = B_2^{\perp}$ (b)

Continuité $\vec{E}^{\parallel}$: $E_1^{\parallel} = E_2^{\parallel}$ (c)

Discontinuité de $B^{\parallel}$ $\Rightarrow$ $\frac{1}{\mu_1}\vec{B}_1 = \frac{1}{\mu_2}\vec{B}_2$ (d)

(a) : $\varepsilon_1 E_1^{\perp} = \varepsilon_2 E_2^{\perp} \Rightarrow \varepsilon_1 E_i^{\perp} e^{-i\vec{k}_i\cdot\vec{r}} + \varepsilon_1 E_r^{\perp} e^{-i\vec{k}_r\cdot\vec{r}} = \varepsilon_2 E_t^{\perp} e^{-i\vec{k}_t\cdot\vec{r}}$

A l'interface : $\vec{K_i} \cdot \vec{r} = \vec{K_r} \cdot \vec{r} = \vec{K_t} \cdot \vec{r}$

$y = 0 \Rightarrow (K_i)_z = (K_r)_z = (K_t)_z$

$z = 0 \Rightarrow (K_i)_y = (K_r)_y = (K_t)_y$