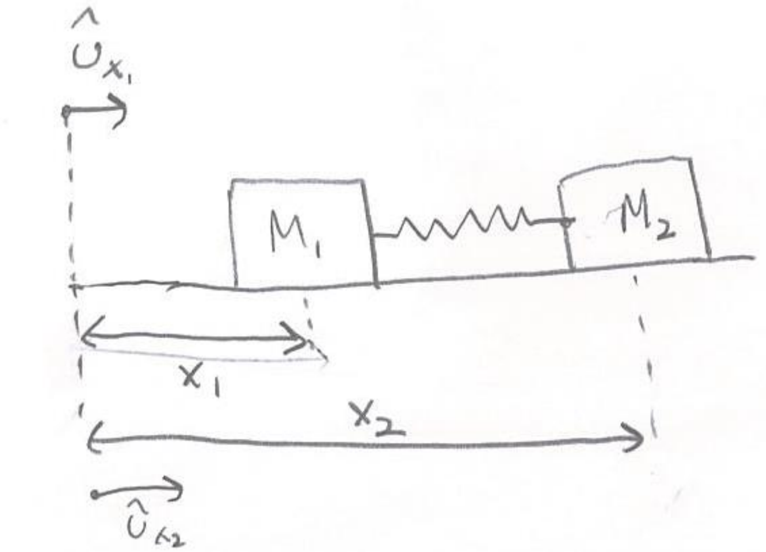
Chapitre 3 : Oscillations couplés et modes normaux

Section I : deux oscillateurs coupl



Soient deux blocs de masses m_1 et m_2 posés sur un plan horizontal, ils sont liés par un ressort idéal de constante de raideur k et de longueur au repos L_0.

On néglige les forces de frottements.

Force exercée sur m_1: $\vec{F}_1 = k(x_2 - x_1)\vec{u}_x$
Force exercée sur m_2 : $\vec{F}_2 = k(x_1 - x_2)\vec{u}_x$

Deuxième loi de Newton : $\begin{cases} m_1\ddot{x}_1 = k(x_2 - x_1) \\ m_2\ddot{x}_2 = k(x_1 - x_2) \end{cases}$

posons $\omega_1^2 = \frac{k}{m_1}$ et $\omega_2^2 = \frac{k}{m_2}$

$$\Longrightarrow \frac{d^2}{dt^2}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\omega_1^2 & \omega_1^2 \\ \omega_2^2 & -\omega_2^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \qquad *$$

Pour résoudre ce système d'équations différentielles, on va chercher les modes propres ou modes normaux :

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = e^{i\omega t} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \frac{d^2}{dt^2} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = -\omega^2 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$* \Longrightarrow -\omega^2 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \;\; o\text{ù}\; M = \begin{pmatrix} -\omega_1^2 & \omega_1^2 \\ \omega_2^2 & -\omega_2^2 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow M \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = -\omega^2 \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$$

$\Longrightarrow \binom{A}{B}$ est vecteur propre de M de valeur propre $-\omega^2$

$\Longrightarrow -\omega^2$ est une valeur propre de M

$$\Longrightarrow Det(M + \omega^2 Id) = 0$$

$$\Longrightarrow Det\begin{pmatrix} -\omega_1^2+\omega^2 & \omega_1^2 \\ \omega_2^2 & -\omega_2^2+\omega^2 \end{pmatrix} = 0$$

$$= (-\omega_1^2+\omega^2)(-\omega_2^2+\omega^2) - \omega_1^2\omega_2^2$$

$$\Longrightarrow \omega^4 - \omega_1^2\omega^2 - \omega_2^2\omega^2 = 0$$

$$\Longrightarrow \omega^2(\omega^2 - \omega_1^2 - \omega_2^2) = 0$$

$$\Longrightarrow \omega^2 = \begin{cases} 0 \\ \omega_1^2+\omega_2^2 \end{cases}$$

$\Longrightarrow$ la solution générale de * $\frac{d^2}{dt^2}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = M\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ est :

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \left(A_+e^{i\omega_+t} + B_+e^{-i\omega_+t}\right)\vec{V}_+ + \left(A_-e^{i\omega_-t} +\right.$$

Section II : n oscillateurs couplés

Plus généralement, les équations du mouvement de n oscillateurs couplés linéairement * est de la forme :

$$M\frac{d^2}{dt^2}\vec{X} + k\vec{X} = \vec{0} \;\; où \; \vec{X} = \{x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n \; \}$$

Couplage linéaire : l'interaction entre les oscillateurs peut être décrit par un potentiel $V(\vec{X})$ qui est un polynôme d'ordre 2 en $x_1, x_2, \ldots\ldots$: $V(\vec{X}) = \sum_{i,j} k^{i,j}\, x_i x_j$

Puisque $x_i x_j = x_j x_i \implies$ k est symétrique !

M est la matrice de masse : $M = \begin{pmatrix} M_1 & 0 & 0 \\ 0 & M_2 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots \end{pmatrix}$ (matrice d'ordre N symétrique).

Section II-1 : Méthodes générales

L'équation du mouvement peut s'écrire :

$$* \qquad \ddot{\vec{X}} + (M^{-1}K)\vec{X} = 0$$

Soit $\{\vec{Y}_i\}_{i=1,2\dots n}$ un ensemble complet de vecteurs propres orthonormés de $(M^{-1}K)$, i.e.

$$M^{-1}K\vec{Y}_i = \lambda_i \vec{Y}_i \quad (\vec{Y}_i\ vec.propre)$$

$$et$$

$$\left(\vec{Y}_i^{\,T}\right).\vec{Y}_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 0\ si\ i \neq j \\ 1\ si\ i = j \end{cases}$$

$$\Longrightarrow\ \exists\ \{\alpha_i(t)\}_{i=1,2\dots n}\ tels\ que\ \vec{X} = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \vec{Y}_j$$

$$* \implies \sum_{j=1}^{n} \ddot{\alpha}_j \vec{Y}_j + \sum_{j=1}^{n} \alpha_j M^{-1} K \vec{Y}_j = 0$$

$$(avec\ M^{-1} K \vec{Y}_j = \lambda_j \vec{Y}_j)$$

$$\implies \sum_{j=1}^{n} (\ddot{\alpha}_j + \alpha_j \lambda_j) \vec{Y}_j = 0$$

$$\implies \forall j\ :\ \ \ddot{\alpha}_j + \alpha_j \lambda_j = 0$$

$$\text{où}\ \alpha_j\ sont\ les\ coordonnées\ normales$$

$\implies$ les coefficients se comportent comme des oscillateurs harmoniques simples de pulsation $\omega_j = \sqrt{\lambda_j}$

Remarque 1 : donc $\{\vec{Y}_i\}_{i=1,2\ldots n}$ est une base de R^n

Remarque 2 : on ne peut pas être certain que $\lambda_j > 0$!

Section II-2 : valeurs initiales

L'équation à résoudre : $\ddot{\vec{X}} + (M^{-1}K)\vec{X} = 0$

Avec conditions initiales : $\vec{X}(0) = \vec{X}_0 \quad et \quad \dot{\vec{X}}(0) = \vec{V}_0$.

En termes des α_j on a: $\vec{X} = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \vec{Y}_j \Longrightarrow \alpha_j(t) = (\vec{Y}_j)^T . \vec{X}(\mathrm{t})$

Avec conditions initiales ci-dessus:

$$\Longrightarrow \begin{cases} \alpha_j(t) = (\vec{Y}_j)^T . \vec{X}_0 \\ \dot{\alpha}_j(t) = (\vec{Y}_j)^T . \vec{V}_0 \end{cases}$$

Section II-3 : frottements

$$** \quad \ddot{\vec{X}} + \Gamma\dot{\vec{X}} + (M^{-1}K)\vec{X} = 0$$

(Γ est une matrice)

Posons $\vec{X}(t) = e^{-i\omega t}\vec{X}(0)$ où $\vec{X}(0)$ est indépendant du temps.

$$** \implies \left(-\omega^2 Id - i\omega\Gamma + (M^{-1}K)\right)\vec{X}(0) = 0$$

Id étant la matrice identité

$\implies \vec{X}(0)$ est un vecteur propre de valeur propre nulle, de la matrice : $[-\omega^2 Id - i\omega\Gamma + (M^{-1}K)]$

Section II-4 : oscillations entretenues

Soit $\vec{F}(t)$ une force externe appliquée au système étudié :

$$\ddot{\vec{X}} + \Gamma\dot{\vec{X}} + (M^{-1}K)\vec{X} = M^{-1}\vec{F}(t)$$

On suppose que $\vec{F}(t) = \vec{F}_0 e^{-i\omega_d t}$

Si la force $\vec{F}(t)$ n'oscille pas dans la même direction sur toutes les composantes, on utilise le principe de superposition.

Posons $\vec{X}(t) = \vec{A}e^{-i\omega_d t} \Longrightarrow$

$$\vec{A} = \left(-{\omega_d}^2 Id - i\omega_d\Gamma + (M^{-1}K)\right)^{-1}\vec{F}_0$$

Remarque 1 : si la matrice $\left(-\omega^2 Id - i\omega\Gamma + (M^{-1}K)\right)$ n'est pas inversible $\Longrightarrow$ résonance !
Remarque 2 : la solution générale est la somme de la sol générale de l'équation homogène et une solution particulière, par exemple celle proposée: ($\vec{X}(t) = \vec{A}e^{-i\omega_d t}$).

Rappel : Equation de **l'oscillateur harmonique simple** :

$$\ddot{X} + \omega^2 X = 0 \qquad \omega: pulsation$$

Solution générale : $X(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$

Avec friction : $*$ $\ddot{X} + \Gamma\dot{X} + {\omega_0}^2 X = 0$

Solution générale :

$$x(t) = e^{-\frac{\Gamma}{2}t}\begin{cases} (Ae^{\omega t} + Be^{-\omega t}) & avec\ \omega = \sqrt{\frac{\Gamma^2}{4} - \omega_0^2}\quad surcritique\ (apériodique) \\ (A + Bt) & critique \\ \big(A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)\big) & avec\ \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\Gamma^2}{4}}\quad sous\ critique(pseudopériodique) \end{cases}$$

Entretenu

$$** \quad \ddot{X} + \Gamma\dot{X} + \omega_0{}^2 X = F(t)/M$$

Solution générale : $X_0(t) + X_F(t)$

Où $X_0(t)$ est la solution générale de * et

$X_F(t)$ est la solution particulière de **

Système de n oscillateurs

$$M\frac{d^2}{dt^2}\vec{X} + k\vec{X} = \vec{0} \;\; o\grave{u}\; \vec{X} = \{x_1, x_2, \dots\dots, x_n\;\}$$

M est la matrice de masse

Solution générale : $\vec{X}(t) = \sum_{j=1}^{n}\left(A_j e^{i\omega_j t} + B_j e^{-i\omega_j t}\right)\vec{V_j}$

où $\vec{V_j}$ est un vecteur propre de $M^{-1}K$ de valeur propre ω_j

Modes propres : $\vec{X}_j^{\pm} = e^{\pm i\omega_j t}\vec{V_j}$