

Chapitre 3 : Oscillations couplés et modes normaux

Section I : deux oscillateurs couplés

Soient deux blocs de masses m_1 et m_2 posés sur un plan horizontal, ils sont liés par un ressort idéal de constante de raideur k et de longueur au repos L_0 .

On néglige les forces de frottements.

Force exercée sur m_1 : $\vec{F}_1 = k(x_2 - x_1)\vec{u}_x$

Force exercée sur m_2 : $\vec{F}_2 = k(x_1 - x_2)\vec{u}_x$

Deuxième loi de Newton :
$$\begin{cases} m_1\ddot{x}_1 = k(x_2 - x_1) \\ m_2\ddot{x}_2 = k(x_1 - x_2) \end{cases}$$

posons $\omega_1^2 = \frac{k}{m_1}$ et $\omega_2^2 = \frac{k}{m_2}$

$$\Rightarrow \frac{d^2}{dt^2} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\omega_1^2 & \omega_1^2 \\ \omega_2^2 & -\omega_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad *$$

Pour résoudre ce système d'équations différentielles, on va chercher les modes propres ou modes normaux :

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = e^{i\omega t} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \frac{d^2}{dt^2} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = -\omega^2 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$* \Rightarrow -\omega^2 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \text{ où } M = \begin{pmatrix} -\omega_1^2 & \omega_1^2 \\ \omega_2^2 & -\omega_2^2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow M \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = -\omega^2 \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$ est vecteur propre de M de valeur propre $-\omega^2$

$\Rightarrow -\omega^2$ est une valeur propre de M

$$\Rightarrow \text{Det}(M + \omega^2 \text{Id}) = 0$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \text{Det} \begin{pmatrix} -\omega_1^2 + \omega^2 & \omega_1^2 \\ \omega_2^2 & -\omega_2^2 + \omega^2 \end{pmatrix} = 0 \\
&= (-\omega_1^2 + \omega^2)(-\omega_2^2 + \omega^2) - \omega_1^2 \omega_2^2 \\
&\quad \Rightarrow \omega^4 - \omega_1^2 \omega^2 - \omega_2^2 \omega^2 = 0 \\
&\quad \Rightarrow \omega^2 (\omega^2 - \omega_1^2 - \omega_2^2) = 0 \\
&\quad \Rightarrow \omega^2 = \begin{cases} 0 \\ \omega_1^2 + \omega_2^2 \end{cases}
\end{aligned}$$

\Rightarrow la solution générale de $* \frac{d^2}{dt^2} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ est :

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = (A_+ e^{i\omega_+ t} + B_+ e^{-i\omega_+ t}) \vec{V}_+ + (A_- e^{i\omega_- t} +$$

Section II : n oscillateurs couplés

Plus généralement, les équations du mouvement de n oscillateurs couplés linéairement * est de la forme :

$$M \frac{d^2}{dt^2} \vec{X} + k \vec{X} = \vec{0} \quad \text{où } \vec{X} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$$

Couplage linéaire : l'interaction entre les oscillateurs peut être décrit par un potentiel $V(\vec{X})$ qui est un polynôme

d'ordre 2 en x_1, x_2, \dots : $V(\vec{X}) = \sum_{i,j} k^{i,j} x_i x_j$

Puisque $x_i x_j = x_j x_i \implies k$ est symétrique !

M est la matrice de masse : $M = \begin{pmatrix} M_1 & 0 & 0 \\ 0 & M_2 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots \end{pmatrix}$ (matrice

d'ordre N symétrique).

Section II-1 : Méthodes générales

L'équation du mouvement peut s'écrire :

$$* \quad \ddot{\vec{X}} + (M^{-1}K)\vec{X} = 0$$

Soit $\{\vec{Y}_i\}_{i=1,2,\dots,n}$ un ensemble complet de vecteurs propres orthonormés de $(M^{-1}K)$, i.e.

$$M^{-1}K\vec{Y}_i = \lambda_i\vec{Y}_i \quad (\vec{Y}_i \text{ vec. propre})$$

et

$$(\vec{Y}_i^T) \cdot \vec{Y}_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \end{cases}$$

$$\Rightarrow \exists \{\alpha_i(t)\}_{i=1,2,\dots,n} \text{ tels que } \vec{X} = \sum_{j=1}^n \alpha_j \vec{Y}_j$$

$$* \Rightarrow \sum_{j=1}^n \ddot{\alpha}_j \vec{Y}_j + \sum_{j=1}^n \alpha_j M^{-1} K \vec{Y}_j = 0$$

(avec $M^{-1} K \vec{Y}_j = \lambda_j \vec{Y}_j$)

$$\Rightarrow \sum_{j=1}^n (\ddot{\alpha}_j + \alpha_j \lambda_j) \vec{Y}_j = 0$$

$$\Rightarrow \forall j : \ddot{\alpha}_j + \alpha_j \lambda_j = 0$$

où α_j sont les coordonnées normales

\Rightarrow les coefficients se comportent comme des oscillateurs harmoniques simples de pulsation $\omega_j = \sqrt{\lambda_j}$

Remarque 1 : donc $\{\vec{Y}_i\}_{i=1,2,\dots,n}$ est une base de R^n

Remarque 2 : on ne peut pas être certain que $\lambda_j > 0$!

Section II-2 : valeurs initiales

L'équation à résoudre : $\ddot{\vec{X}} + (M^{-1}K)\vec{X} = 0$

Avec conditions initiales : $\vec{X}(0) = \vec{X}_0$ et $\dot{\vec{X}}(0) = \vec{V}_0$.

En termes des α_j on a plutôt $\alpha_j(t) = (\vec{Y}_j)^T \cdot \vec{X}(t)$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha_j(t) = (\vec{Y}_j)^T \cdot \vec{X}_0 \\ \dot{\alpha}_j(t) = (\vec{Y}_j)^T \cdot \vec{V}_0 \end{cases}$$

Section II-3 : frottements

$$** \quad \ddot{\vec{X}} + \Gamma \dot{\vec{X}} + (M^{-1}K)\vec{X} = 0$$

(Γ est une matrice)

Posons $\vec{X}(t) = e^{-i\omega t} \vec{X}(0)$ où $\vec{X}(0)$ est indépendant du temps.

$$** \implies (-\omega^2 Id - i\omega\Gamma + (M^{-1}K))\vec{X}(0) = 0$$

Id étant la matrice identité

$\implies \vec{X}(0)$ est un vecteur propre de valeur propre nulle, de la matrice : $[-\omega^2 Id - i\omega\Gamma + (M^{-1}K)]$

Section II-4 : oscillations entretenues

Soit $\vec{F}(t)$ une force externe appliquée au système étudié :

$$\ddot{\vec{X}} + \Gamma \dot{\vec{X}} + (M^{-1}K)\vec{X} = M^{-1}\vec{F}(t)$$

On suppose que $\vec{F}(t) = \vec{F}_0 e^{-i\omega_d t}$

Si la force $\vec{F}(t)$ n'oscille pas dans la même direction sur toutes les composantes, on utilise le principe de superposition.

Posons $\vec{X}(t) = \vec{A}e^{-i\omega_d t} \Rightarrow$

$$\vec{A} = \left(-\omega^2 Id - i\omega\Gamma + (M^{-1}K) \right)^{-1} \vec{F}_0$$

Remarque 1 : si la matrice $\left(-\omega^2 Id - i\omega\Gamma + (M^{-1}K) \right)$ n'est pas inversible \Rightarrow résonance !

Remarque 2 : la solution générale est la somme de la sol générale de l'équation homogène et une solution particulière, par exemple celle proposée: $(\vec{X}(t) = \vec{A}e^{-i\omega_d t})$.

Rappel : Equation de l'oscillateur harmonique simple :

$$\ddot{X} + \omega^2 X = 0 \quad \omega: \text{pulsation}$$

Solution générale : $X(t) = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)$

Avec friction : * $\ddot{X} + \Gamma \dot{X} + \omega_0^2 X = 0$

Solution générale :

$$x(t) = e^{-\frac{\Gamma}{2}t} \left\{ \begin{array}{ll} (Ae^{\omega t} + Be^{-\omega t}) & \text{avec } \omega = \sqrt{\frac{\Gamma^2}{4} - \omega_0^2} \text{ surcritique (apériodique)} \\ (A + Bt) & \text{critique} \\ (A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)) & \text{avec } \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\Gamma^2}{4}} \text{ sous critique (pseudopériodique)} \end{array} \right.$$

Entretenu

$$** \quad \ddot{X} + \Gamma \dot{X} + \omega_0^2 X = F(t)/M$$

Solution générale : $X_0(t) + X_F(t)$

Où $X_0(t)$ est la solution générale de * et
 $X_F(t)$ est la solution particulière de **

Système de n oscillateurs

$$M \frac{d^2}{dt^2} \vec{X} + k \vec{X} = \vec{0} \quad \text{où } \vec{X} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$$

M est la matrice de masse

Solution générale : $\vec{X}(t) = \sum_{j=1}^n (A_j e^{i\omega_j t} + B_j e^{-i\omega_j t}) \vec{V}_j$

où \vec{V}_j est un vecteur propre de $M^{-1}K$ de valeur propre ω_j

Modes propres : $\vec{X}_j^{\pm} = e^{\pm i\omega_j t} \vec{V}_j$

