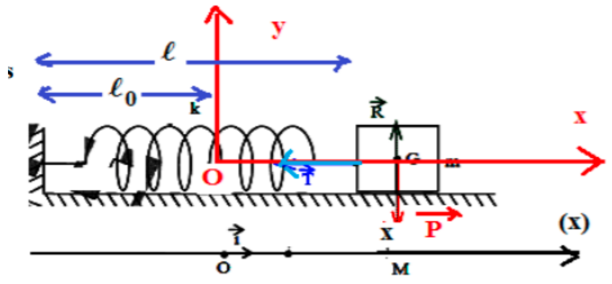
Chapitre 2
Oscillations forcées et résonnance



2.1 Oscillateur amorti :

On considère le même système masse-ressort horizontal, mais avec un coefficient de viscosité dynamique μ.
On établit l'équation différentielle du mouvement :
Système : point matériel de masse m se déplaçant le long d'un axe Ox, dont l'origine est fixée au niveau de la position à l'équilibre du point matériel,
Référentiel du laboratoire considéré comme galiléen,

Bilan des forces :

la force de rappel : $-kx\vec{u}_x$

la force de frottement fluide : $-m\Gamma\dot{x}\vec{u}_x$

le poids est compensé par la réaction de l'axe.

Application du principe fondamental de la dynamique, projeté sur l'axe Ox :

$$m\ddot{x} = -kx - m\Gamma\dot{x} \implies$$

$$\ddot{x} + \Gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \qquad avec \;\; \omega_0^2 = \frac{k}{m}$$

l’équation caractéristique associée est :
$r^2 + \Gamma \mathrm{r} + \omega_0^2 = 0,$

$$\Delta = \Gamma^2 - 4\omega_0^2$$

les racines de celle-ci sont : $r_{\pm} = \frac{-\Gamma \pm \sqrt{\Gamma^2 - 4\omega_0^2}}{2}$

$$r_{\pm} = -\frac{\Gamma}{2} \pm \sqrt{\frac{\Gamma^2}{4} - \omega_0^2}$$

Les solutions de l’équation différentielle sont de la forme : $x(t) = Ae^{r_+ t} + Be^{r_- t}$

On distingue trois régimes :

Cas sur-amorti :

$\frac{\Gamma}{2} > \omega_0 \Longrightarrow r_\pm$ sont réels

$$r_\pm = -\frac{\Gamma}{2} \pm \sqrt{\frac{\Gamma^2}{4} - \omega_0^2} < 0$$

les deux exponentielles ($e^{r_+ t}$ et $e^{r_- t}$) sont des fonctions décroissantes.

Cas sous-amorti:

Les racines de l'équation caractéristique sont complexes :

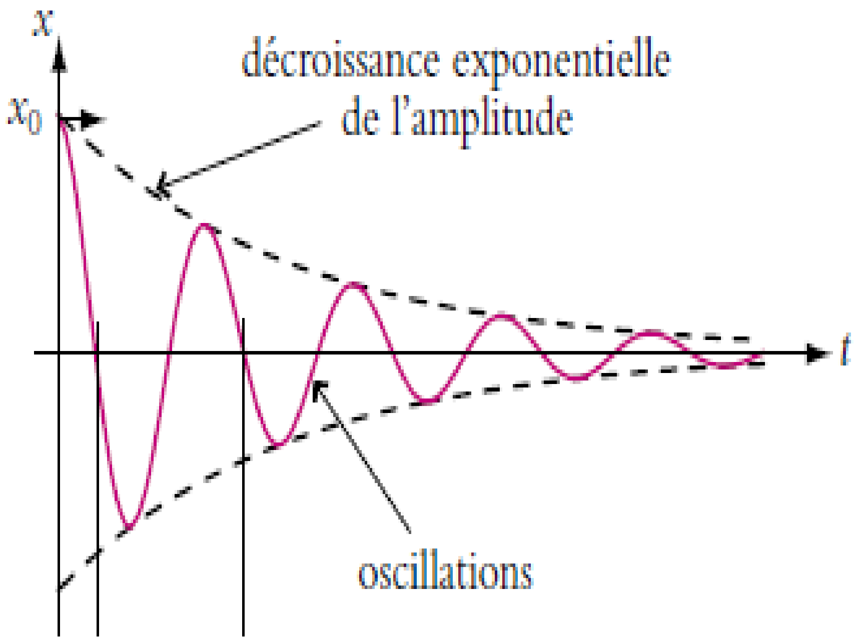
$$r_{\pm} = -\frac{\Gamma}{2} \pm i\sqrt{\omega_0^2 - \frac{\Gamma^2}{4}}$$

la solution de l'équation différentielle est donnée par :

$$x(t) = e^{-\frac{\Gamma}{2}t}(A'cos(\omega t) + B'sin(\omega t))$$

le régime est dit pseudopériodique de pseudopériode T égale à la période de la partie périodique:

$T = 2\pi\omega$ avec $\omega^2 = \omega_0^2 - \frac{\Gamma^2}{4}$



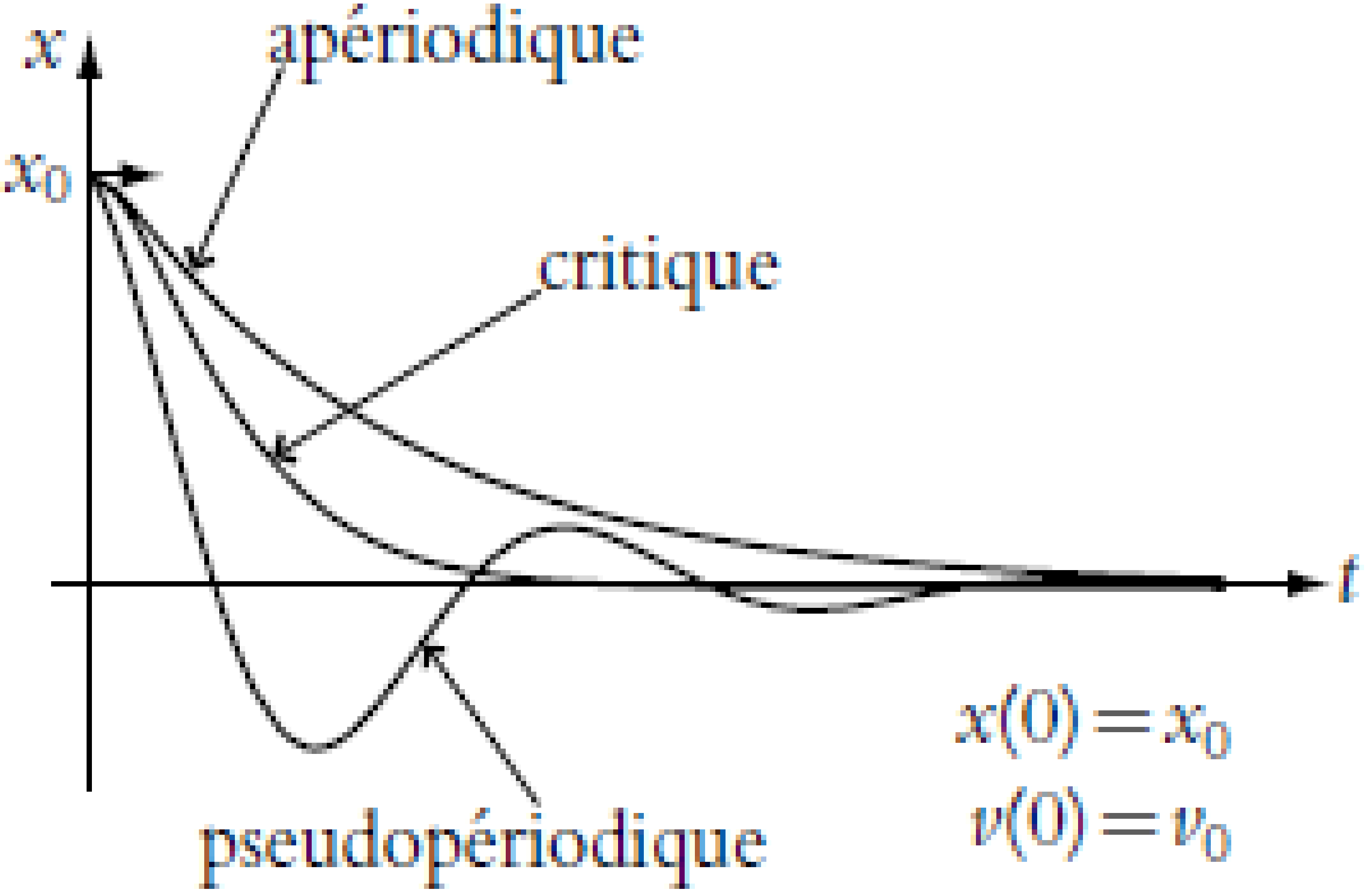
Cas critique :

$\Delta = 0$ soit $\frac{\Gamma}{2} = \omega_0$ d'où :

$$r_{\pm} = -\frac{\Gamma}{2}$$

La solution de l'équation différentielle est donnée par:

$$x(t) = e^{-\frac{\Gamma}{2}t}(A + Bt) \Longrightarrow pas\ d'oscillations$$



x
x_0
apériodique
critique
t
pseudopériodique
$x(0) = x_0$
$v(0) = v_0$

2.2 Oscillateurs entretenus

Soit un oscillateur auquel on applique une force externe parallèle à l'axe Ox : $\vec{f}(t) = f(t)\vec{u}_x$

L'équation du mouvement devient :

$$* \quad m\ddot{x} + kx + m\Gamma\dot{x} = f(t) \Longrightarrow \ddot{x} + \Gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{f(t)}{m}$$

Supposons que f(t) est périodique de la forme : $f(t) = f_0\cos(\omega_d t)$ où ω_d est la pulsation d'entraînement.

Remarque :

Si x’(t) est la solution particulière de * et y(t) est la solution de l’équation homogène de * ($\ddot{y} + \Gamma\dot{y} + \omega_0^2 y = 0 \ \ **$)

$\Longrightarrow x'(t) + y(t)$ est solution de *

$\Longrightarrow$ la solution générale de * est $x'(t) + y(t)$

En notation complexe

$Soit\ \bar{f}(t)$ la fonction complexe associée à f(t): $\bar{f}(t) = f_0 e^{-i\omega_d t}$

$$si\quad \ddot{z}(t) + \Gamma\dot{z}(t) + \omega_0^2 z(t) = \frac{\bar{f}(t)}{m} \qquad ***$$

$$\Longrightarrow Re\{z(t)\} = x(t)$$

Posons $z(t) = Ae^{-i\omega_d t}$

$*** \Longrightarrow -\omega_d^2 z(t) - i\Gamma\omega_d z(t) + \omega_0^2 z(t) = \frac{\bar{f}(t)}{m}$

$*** \Longrightarrow \left(-\omega_d^2 - i\Gamma\omega_d + \omega_0^2\right)A = \frac{f_0}{m}$ d'où

$$A = \frac{\frac{f_0}{m}}{(-\omega_d^2 - i\Gamma\omega_d + \omega_0^2)} = \frac{f_0}{m}\left(\frac{1}{(\omega_0^2 - \omega_d^2 - i\Gamma\omega_d)}\frac{\left(\omega_0^2 - \omega_d^2 + i\Gamma\omega_d\right)}{(\omega_0^2 - \omega_d^2 + i\Gamma\omega_d)}\right)$$

$$A = \frac{f_0}{m}\left(\frac{\omega_0^2 - \omega_d^2 + i\Gamma\omega_d}{(\omega_0^2 - \omega_d^2)^2 + (\Gamma\omega_d)^2}\right)$$

$$A = \frac{f_0}{m}\left(\frac{\omega_0^2 - \omega_d^2 + i\Gamma\omega_d}{(\omega_0^2 - \omega_d^2)^2 + (\Gamma\omega_d)^2}\right)$$

$$Re\{z(t)\} = x(t)$$

$$x(t) = \frac{f_0}{m}\left(\frac{(\omega_0^2 - \omega_d^2)\cos(\omega_d t)}{(\omega_0^2 - \omega_d^2)^2 + (\Gamma\omega_d)^2} + \frac{\Gamma\omega_d \sin(\omega_d t)}{(\omega_0^2 - \omega_d^2)^2 + (\Gamma\omega_d)^2}\right)$$

$$\frac{f_0}{m}\left(\frac{(\omega_0^2 - \omega_d^2)}{(\omega_0^2 - \omega_d^2)^2 + (\Gamma\omega_d)^2}\right) \equiv Amplitude\ \text{é}lastique\ = A$$

$$\frac{f_0}{m}\left(\frac{\Gamma\omega_d}{(\omega_0^2 - \omega_d^2)^2 + (\Gamma\omega_d)^2}\right) = Amplitude\ absorbante = B$$

$$\Longrightarrow x(t) = A\cos(\omega_d t) + B\sin(\omega_d t)$$

Résonance :

Si $\omega_0^2 = \omega_d^2$,

Alors $x(t) = -\frac{f_0}{m\omega_d\Gamma}\sin(\omega_d t)$

Si Γest petit, l'amplitude de $x(t)$ est alors très grand !

Ce phénomène est la résonance en amplitude.

Le travail de la force $f(t)$ durant l'intervalle de temps $[t_1, t_2]$ est:

$W_{t_1 \to t_2} = \int_{t_1}^{t_2} P(t)dt$ où P(t) est la puissance.

$$P(t) = f(t)\dot{x}(t)$$

$P(t) = f_0 \cos(\omega_d t)\,(-A\omega_d \sin(\omega_d t) + B\omega_d \cos(\omega_d t))$

$$P(t) = -Af_0\omega_d \cos\omega_d t\; sin\omega_d t + Bf_0\omega_d cos^2\omega_d t$$

Le terme : $\cos\omega_d t\, sin\omega_d t = \frac{1}{2} sin2\omega_d t$

$$oscille\ entre + et -$$

Le terme : $cos^2\omega_d t$ est toujours positif.

$$\int_t^{t+\frac{T}{2}} sin2\omega_d t dt = 0 \qquad \text{où}\, T\ est\ la\ \text{p}é\text{riode}$$

$$W_{t\longrightarrow t+T} = Bf_0\omega_d \int_t^{t+T} cos^2\omega_d t dt = Bf_0\pi$$

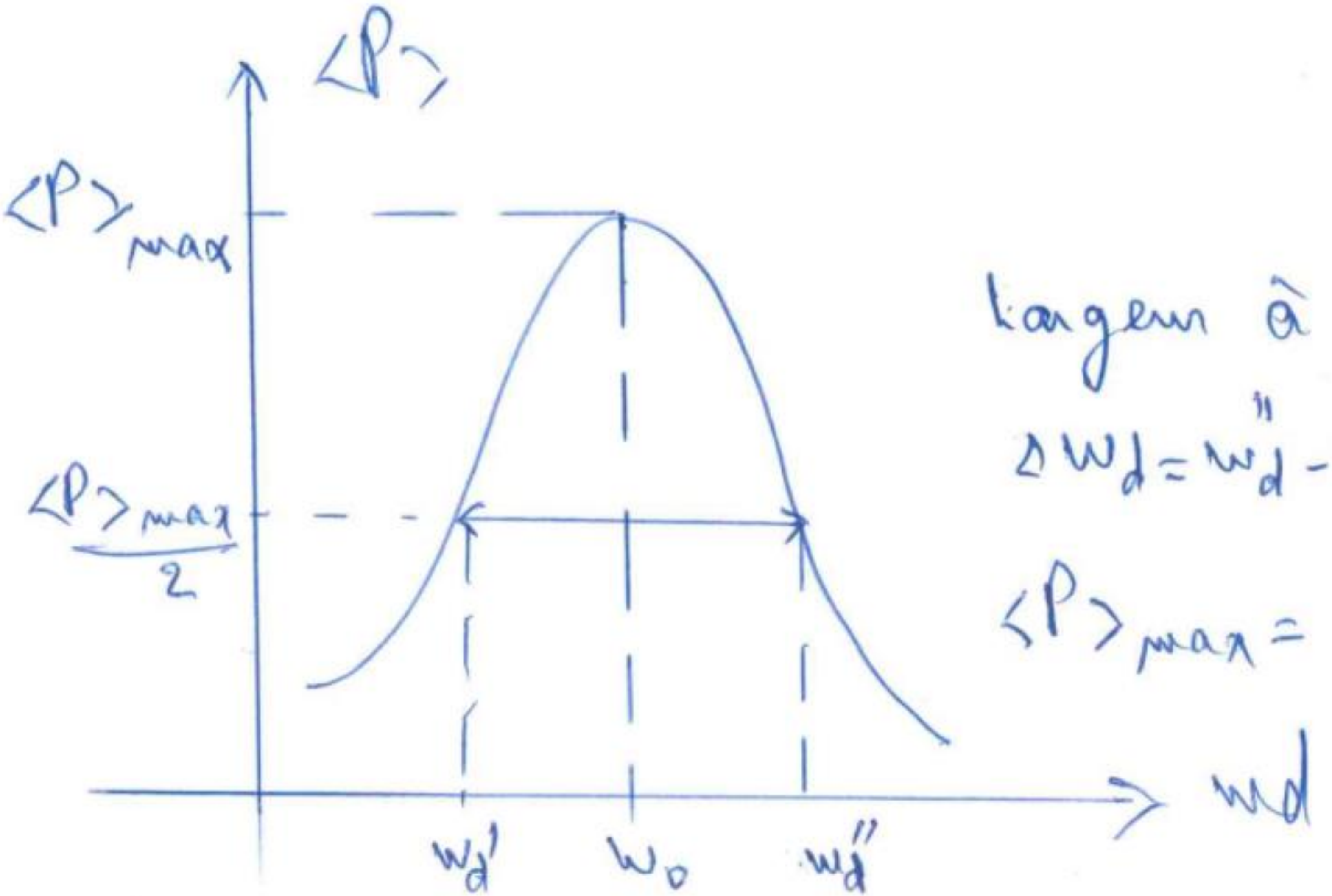
La puissance moyenne sur une période :

$$< P >= \frac{W_{t\longrightarrow t+T}}{T} = Bf_0\omega_d$$

soit

$$< P >= \frac{f_0^2}{m}\left(\frac{\Gamma\omega_d^2}{(\omega_0^2-\omega_d^2)^2+(\Gamma\omega_d)^2}\right)$$

maximum pour $\omega_d = \omega_0$



Largeur à mi-hauteur :

$$\Delta w_d = w_d'' - w_d' = \Gamma$$

$$\langle P \rangle_{max} = \frac{f_0^2}{m\Gamma}$$

Remarque

Pour l'oscillateur amorti :

$$x(t) = e^{-\frac{\Gamma}{2}t}(A'cos(\omega t) + B'sin(\omega t))$$

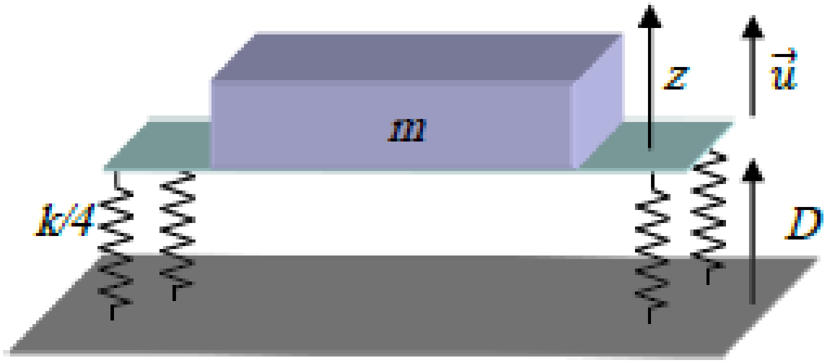
La demi-vie de x(t) :

Le temps au bout duquel l'amplitude de x(t) est divisée par 2.

Ce temps est proportionnel à $\frac{1}{\Gamma} \longrightarrow$ la largeur du pic à la résonance est inversement Proportionnelle au temps de vie de l'oscillateur.

APPLICATION

Un appareil fragile de masse m repose sur un socle horizontal au moyen de quatre ressorts de raideur K/4. Ce socle est soumis à des vibrations verticales sinusoïdales $D(t) = d_0 \sin(\omega t)$ de pulsation ω et d'amplitude d_0. On note z le déplacement vertical de l'appareil par rapport à sa position d'équilibre z_{eq} et f le coefficient de frottement. On note z_0 la position des ressort en l'absence de la masse m. On note G le centre de gravité de la masse m. On note $\vec{u}$ le vecteur unitaire vertical orienté vers le haut.



1. *Déterminer la constante de raideur k du ressort équivalent aux 4 ressorts.*
2. *Donner l'expression de la force $\overrightarrow{F_{ext}}$ qu'il faut exercer sur le ressort équivalent pour le déformer (variation de longueur) de D(t).*
3. *Faire le bilan des forces qui s'exercent sur le centre de gravité G de la masse m lorsqu'elle est en mouvement.*
4. *Etablir l'équation différentielle du mouvement de l'appareil $z(t)$ en présence de la*

5. Déterminer la position d'équilibre Z_{eq} du système en l'absence de vibrations verticales.
6. Réécrire l'équation différentielle du mouvement en fonction de la variable $Z'=z-z_{eq}$ et la simplifier en posant $\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{m}}$ et $\alpha = \frac{f}{2m}$.
7. Déterminer la solution particulière (régime permanent) de cette équation en cherchant l'amplitude de l'oscillation $Z'(t)$ de l'appareil sous la forme complexe : $Z'(t) = Z_0 e^{i(\omega t+\varphi)}$, on a alors $\sin(\omega t) = e^{i(\omega t-\frac{\pi}{2})}$. Déterminer Z_0 et φ.
8. Calculer le rapport $R=Z_0/d_0$ caractérisant la réponse du système, en l'exprimant en fonction de la variable $x=\omega/\omega_0$ et du paramètre $Q=\omega_0/2\alpha$ sous la forme : $R(x) = \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)^2+\left(\frac{x}{Q}\right)^2}}$
9. Montrer que $R(x)$ présente un maximum pour ω proche de ω_0 lorsque le système est faiblement amorti ($Q>>1$). Donner l'allure de $R(x)$.
10. Montrer que $R(x)$ décroît continument pour $Q \lesssim \frac{1}{\sqrt{2}}$. Donner l'allure de $R(x)$.
11. En supposant que $\Gamma = \frac{\omega_0}{10}$, trouver la condition sur K et ω pour que $R(x)<<1$.

Les ressort sont en parallèle alors la constante de raideur du ressort équivalent est égale à la somme des constante de raideur soit k=K

Cette force est qu'il faut exercer sur le ressort pour le déformer de $d_0 sin(\omega t)$ soit $\overrightarrow{F_{ext}} = d_0 k sin(\omega t)\vec{u}$

Le poids: $\vec{P} = -mg\vec{u}$

Le ressort: $\vec{F} = -k(z - z_0)\vec{u}$

Frottement: $\vec{f} = -f\vec{v}$

Vibration: $\overrightarrow{F_{ext}} = d_0 k sin(\omega t)\vec{u}$ *cette forme se répercute*

$$\frac{d^2z}{dt^2} = -g - \frac{k}{m}(z - z_0) - \frac{f}{m}\frac{dz}{dt} + \frac{d_0}{m} k sin(\omega t)$$

A l'équilibre la somme des forces est nulle :

$-k(z_{eq} - z_0)\vec{u} - mg\vec{u} = 0$ *donc* $z_{eq} = z_0 - \frac{m}{k} g$

6

$$\frac{d^2Z'}{dt^2} = -g - \frac{k}{m}(Z' + z_{eq} - z_0) - \frac{f}{m}\frac{dz'}{dt} + d_0\frac{k}{m}sin(\omega t)$$

$$\frac{d^2Z'}{dt^2} = -g - \frac{k}{m}\left(Z' + z_0 - \frac{m}{k}g - z_0\right) - \frac{f}{m}\frac{dz'}{dt} + d_0\frac{k}{m}sin(\omega t)$$

$$\frac{d^2Z'}{dt^2} = -\frac{k}{m}Z' - \frac{f}{m}\frac{dZ'}{dt} + d_0\frac{k}{m}sin(\omega t)$$

$$\frac{d^2Z'}{dt^2} + \frac{k}{m}Z' + \frac{f}{m}\frac{dZ'}{dt} = d_0\frac{k}{m}sin(\omega t)$$

Par identification avec l'équation avec l'équation

$$\frac{d^2Z'}{dt^2} + \omega_0^2 Z' + 2\alpha\frac{dZ'}{dt} = d_0\omega_0^2 sin(\omega t)$$

On a : $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ et $\alpha = \frac{f}{2m}$

7 On injecte l'expression de $Z'(t)$ dans l'équation de mouvement, on obtient alors :

$$-\omega^2 Z_0 e^{i(\omega t+\varphi)} + \omega_0^2 Z_0 e^{i(\omega t+\varphi)} + 2\alpha i\omega Z_0 e^{i(\omega t+\varphi)} = d_0\omega_0^2 e^{i(\omega t-\frac{\pi}{2})}$$

On divise tout par $e^{i(\omega t)}$ on a alors :

$$-\omega^2 Z_0 e^{i(\varphi)} + \omega_0^2 Z_0 e^{i(\varphi)} + 2\alpha i\omega Z_0 e^{i(\varphi)} = d_0\omega_0^2 e^{i(-\frac{\pi}{2})}$$

$$Z_0 e^{i(\varphi)} = \frac{d_0\omega_0^2 e^{i(-\frac{\pi}{2})}}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2\alpha i\omega}$$

Pour déterminer la phase on doit avoir partie réelle et imaginaire au numérateur,

$$Z_0 e^{i(\varphi)} = \frac{d_0 \omega_0^2 e^{i(-\frac{\pi}{2})}}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2\alpha i \omega} * \frac{\omega_0^2 - \omega^2 - 2\alpha i \omega}{\omega_0^2 - \omega^2 - 2\alpha i \omega} = \frac{d_0 \omega_0^2 e^{i(-\frac{\pi}{2})}}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\alpha\omega)^2} (\omega_0^2 - \omega^2 - 2\alpha i \omega \quad)$$

On rappelle que $e^{i(-\frac{\pi}{2})} = -i$ *On a donc :*

$$Z_0 e^{i(\varphi)} = \frac{d_0 \omega_0^2 e^{i(-\frac{\pi}{2})}}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\alpha\omega)^2} (-i(\omega_0^2 - \omega^2) - 2\alpha\omega \quad)$$

$$\varphi = atan\left(\frac{(\omega_0^2 - \omega^2)}{2\alpha\omega}\right)$$

8. *Calculer le rapport $R=Z_0/d_0$ caractérisant la réponse du système, en l'exprimant en fonction de la variable $x=\omega/\omega_0$ et du paramètre $Q=\omega_0/2\alpha$ sous la forme :* $R(x) = \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)^2+\left(\frac{x}{Q}\right)^2}}$

$$R = \frac{\omega_0^2}{\sqrt{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2+(2\alpha\omega)^2}} = \frac{1}{\sqrt{\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2+\left(\frac{2\alpha\omega}{\omega_0^2}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)^2+\left(\frac{x}{Q}\right)^2}}$$

9. *Montrer que R(x) présente un maximum pour ω proche de ω_0 lorsque le système est faiblement amorti ($Q >> 1$). Donner l'allure de R(x).*

Si Q>>1 On a alors : $R = \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)^2+\left(\frac{x}{Q}\right)^2}}$ On a bien un maximun pour x=1 avec

$\varepsilon \ll 1$

x=0 R=0, x=Q R=max x=∞ R=0, ce qui permet de tracer l'allure

10. *Montrer que R(x) décroît continument pour $Q \lesssim \frac{1}{\sqrt{2}}$. Donner l'allure de R(x).*

Si Q<1 alors $R = \frac{1}{\sqrt{1+x^4+x^2\left(\frac{1}{Q^2}-2\right)}}$ avec $\left(\frac{1}{Q^2}-2\right) > 0$ il n'y a donc plus de maximum car le dénominateur ne passe plus par un minimum pour x>0. R(x) décroît continument.

11. *En supposant que $\alpha = \frac{\omega_0}{20}$, trouver la condition sur K pour que R(x)<<1.*

On alors Q≈10 on a donc une résonnance, si on veut R(x) alors $\omega_0 \ll 1$ soit K<<m dans ce cas c'est l'aspect inertiel qui l'emporte rapide pour ω> $\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{m}}$