Chapitre 1 : Oscillateurs harmoniques

On appelle oscillateur harmonique non amorti, tout système physique décrit par une fonction $\psi(t)$, qui vérifie l'équation différentielle :

$$\frac{d^2\psi(t)}{dt^2} + \omega_0^2\psi(t) = \omega_0^2\psi_0$$

$\psi(t)$ est une fonction caractéristique du système physique étudié, elle peut être une charge électrique, une tension électrique, une intensité de courant électrique ou une élongation d'un système masse-ressort.

ω_0 est la pulsation propre de l'oscillateur harmonique :

Dans le cas d’une corde vibrante ou d’un système masse-ressort $\psi(t)$ est l’amplitude des vibrations et ψ_m est sa valeur maximale.

ϕ est la phase à l’origine des temps.

$\omega_0 = 2\pi f_0$ f_0 est la fréquence propre de l’oscillateur.

La solution de l’équation différentielle précédente est de la forme :

$$\psi(t) = \psi_0 + \psi_m cos(\omega_0 t + \phi)$$

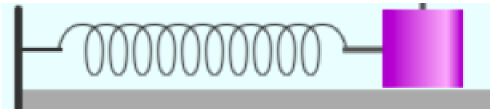
Où ψ_m et ϕ sont des constantes, que l’on détermine à partir des conditions initiales

$\psi(t) = \psi_0$ correspond à une position d’équilibre de l’oscillateur harmonique.

Un exemple simple : L'oscillateur harmonique simple.

Sec I.I

Soit un bloc de masse M posé sur un plan horizontal, et libre de se déplacer sans frottement, mais attaché à un ressort idéal sans masse lui-même accroché à un mur.



C'est un exemple de système a un seul degré de Liberté.

Rappel:
Un ressort idéal et un ressort qui obéit à la loi de Hooke : $E_P = \frac{1}{2}k(L - L_0)^2 = \frac{1}{2}kx^2$
avec $x = L - L_0$

Expression dans laquelle k est la constante de rappel ou de raideur du ressort.
L_0 est la longueur de a avide du ressort.

$$\vec{F} = \left(-\frac{\partial E_P}{\partial x}\right)\vec{u}_x \quad \text{avec } E_P = \frac{1}{2}kx^2$$

d'où

$$\vec{F} = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{1}{2}kx^2\right)\vec{u}_x = -kx.\vec{u}_x$$

La deuxième loi de Newton s'écrit : $\vec{F} = \boldsymbol{m}\vec{a}$

$$\boldsymbol{soit} \quad -kx.\vec{u}_x = \boldsymbol{m\ddot{x}}.\vec{u}_x$$

$$\boldsymbol{\ddot{x}} + \omega^2 x(t) = 0$$

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + \omega^2 x(t) = 0 \quad ou \quad \left(\frac{d^2}{dt^2} + \omega^2\right)x(t) = 0$$

La solution de cette équation différentielle est :

$x(t) = Acos(\omega t) + Bsin(\omega t)$ où A et B sont des constantes que l'on détermine à partir des conditions initiales :

$$\begin{cases} x(0) = Acos(0) + Bsin(0) \\ \dot{x}(0) = -A\omega sin(0) + B\omega cos(0) \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} A = x(0) \\ B = \dot{x}(0)/\omega \end{cases}$$

Exemple : prenons $x(0) = 1m \quad et\ \dot{x}(0) = 0m/s \quad \Longrightarrow$

$$\begin{cases} x(t) = Acos(\omega t) \quad avec\ A = 1m \\ \dot{x}(t) = -A\omega sin(\omega t) \end{cases}$$

Remarques :

$$\begin{cases} cos(x) = cos(x + 2\pi) \\ sin(x) = sin(x + 2\pi) \end{cases} \quad \Longrightarrow \begin{cases} x\left(t + \frac{2\pi}{\omega}\right) = x(t) \\ \dot{x}\left(t + \frac{2\pi}{\omega}\right) = \dot{x}(t) \end{cases}$$

après un temps $T = \frac{2\pi}{\omega}$ le système revient à sa position initiale, T est la période des oscillations et $\frac{1}{T} = \nu$ est leur fréquence.

Le système est dit harmonique simple :

Harmonique : les solutions sont des sommes de fonctions trigonométriques.

Simple : tous les termes de la solution ont la même fréquence.

L'équation différentielle du mouvement de la masse M décrit un grand nombre de systèmes physiques.

Qu'est ce que ces systèmes ont en commun ?

Pourquoi les systèmes harmoniques sont-ils très répandus ?

2) propriétés

a) $\left(\frac{\partial E}{\partial t}\right) = 0$ avec $E = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2$

b) Les équations du mouvement sont linéaires :

Si $\ddot{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{1}} + \omega^2 x_1 = 0 \quad et\ \ddot{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{2}} + \omega^2 x_2 = 0 \implies$

$(x_1 \ddot{+} x_2) + \omega^2(x_1 + x_2) = 0$

Si un système satisfait les conditions a et b, on pourra le réduire à un ensemble d’oscillateurs harmoniques simples et à l’oscillateur hyperbolique : $\ddot{\boldsymbol{x}} - \omega^2 x(t) = 0$

Section I-2 : Linéarité et superposition

Une équation est linéaire si pour toutes solutions $f\ et\ g, \alpha f + \beta g$ est aussi solution pour toute constantes $\alpha\ \ et\ \ \beta$.

Une équations aux dérivées ordinaires (e. d. o.) est de la forme :

$$S(t) + \alpha_0 f(t) + \alpha_1 f(\dot{t}) + \alpha_2 f(\ddot{t}) + \cdots = 0 \qquad **$$

** est dite homogène si $S(t) = 0$, sinon elle est inhomogène.
Etudions le cas homogène : sachant que ** est linéaire, ses solutions engendrent un espace vectoriel.
Cherchons une base, c'est-à-dire un ensemble $\{f_i\}_{i=1,2\ldots}$ tel que toute solution de ** est de la forme :

$$\sum_{i=1}^{n} \gamma_i f_i \quad avec \quad \frac{\partial \gamma_i}{\partial t} = 0$$

On propose comme solution de ** : $f(t) = e^{kt}$
Or $e^k = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{k^n}{n!} \quad et \;\; S(t) = 0$

** devient :

$$\alpha_0 e^{kt} + \alpha_1 k e^{kt} + \alpha_2 k^2 e^{kt} + \alpha_3 k^3 e^{kt} + \cdots = 0$$

D'où $\quad \alpha_0 + \alpha_1 k + \alpha_2 k^2 + \alpha_3 k^3 + \cdots = 0$

polynôme d'ordre n en k.

Dans le cas de l'oscillateur harmonique simple :

$$\alpha_0 = \omega^2, \qquad \alpha_1 = 0 \;\; et \;\; \alpha_2 = 1 \;\; (degré\ 2)$$

$$\Longrightarrow \ddot{f} + \omega^2 f = 0 \;\; \Longrightarrow r^2 + \omega^2 = 0 \Longrightarrow r = \pm i\omega$$

$\Longrightarrow$ les solutions sont de la forme :

$$f(t) = Ae^{i\omega t} + Be^{-i\omega t}$$

Rappel -nombres complexes :

$$Z = a + ib, \qquad \bar{Z} = a - ib$$

$$e^{i\theta} = cos\theta + isin\theta \;\; formule\ d'Euler$$

$$e^{i\theta} = 1 + i\theta + \frac{i^2\theta^2}{2!} + \frac{i^3\theta^3}{3!} + \cdots$$

$$= \left(1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} + \cdots\right) + i\left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} \ldots\right)$$

$$= cos\theta + isin\theta$$

$$\begin{cases} cos\theta = \dfrac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \\ sin\theta = \dfrac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \end{cases}$$