Chapitre 1 : Oscillateurs harmoniques

On appelle oscillateur harmonique non amorti, tout système physique décrit par une fonction $\psi(t)$, qui vérifie l'équation différentielle :

$$\frac{d^2\psi(t)}{dt^2} + \omega_0^2\psi(t) = \omega_0^2\psi_0$$

$\psi(t)$ est une fonction caractéristique du système physique étudié, elle peut être une charge électrique, une tension électrique, une intensité de courant électrique ou une élongation d'un système masse-ressort.

ω_0 est la pulsation propre de l'oscillateur harmonique :

Dans le cas d’une corde vibrante ou d’un système masse-ressort $\psi(t)$ est l’amplitude des vibrations et ψ_m est sa valeur maximale.

ϕ est la phase à l’origine des temps.

$\omega_0 = 2\pi f_0$ f_0 est la fréquence propre de l’oscillateur.

La solution de l’équation différentielle précédente est de la forme :

$$\psi(t) = \psi_0 + \psi_m cos(\omega_0 t + \phi)$$

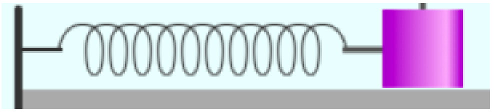
Où ψ_m et ϕ sont des constantes, que l’on détermine à partir des conditions initiales

$\psi(t) = \psi_0$ correspond à une position d’équilibre de l’oscillateur harmonique.

Un exemple simple :
L'oscillateur harmonique simple.

Sec I.I

Soit un bloc de masse M posé sur un plan horizontal, et libre de se déplacer sans frottement, mais attaché à un ressort idéal sans masse lui-même accroché à un mur.



C'est un exemple de système a un seul degré de Liberté.

Rappel:
Un ressort idéal et un ressort qui obéit à la loi de Hooke : $E_P = \frac{1}{2}k(L - L_0)^2 = \frac{1}{2}kx^2$
avec $x = L - L_0$

Expression dans laquelle k est la constante de rappel ou de raideur du ressort.
L_0 est la longueur de a avide du ressort.

$$\vec{F} = \left(-\frac{\partial E_P}{\partial x}\right)\vec{u}_x \quad \text{avec } E_P = \frac{1}{2}kx^2$$

d'où

$$\vec{F} = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{1}{2}kx^2\right)\vec{u}_x = -kx.\vec{u}_x$$

La deuxième loi de Newton s'écrit : $\vec{F} = \boldsymbol{m}\vec{a}$

$$\boldsymbol{soit} \ \ -kx.\vec{u}_x = \boldsymbol{m\ddot{x}}.\vec{u}_x$$

$$\boldsymbol{\ddot{x}} + \ \omega^2 x(t) = 0$$

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + \omega^2 x(t) = 0 \quad ou \quad \left(\frac{d^2}{dt^2} + \omega^2\right)x(t) = 0$$

La solution de cette équation différentielle est :

$x(t) = Acos(\omega t) + Bsin(\omega t)$ où A et B sont des constantes que l'on détermine à partir des conditions initiales :

$$\begin{cases} x(0) = Acos(0) + Bsin(0) \\ \dot{x}(0) = -A\omega sin(0) + B\omega cos(0) \end{cases} \quad \text{soit} \begin{cases} A = x(0) \\ B = \dot{x}(0)/\omega \end{cases}$$

Exemple : prenons $x(0) = 1m \quad et\ \dot{x}(0) = 0m/s \quad \Longrightarrow$

$$\begin{cases} x(t) = Acos(\omega t) \quad avec\ A = 1m \\ \qquad \dot{x}(t) = -A\omega sin(\omega t) \end{cases}$$

Remarques :

$$\begin{cases} cos(x) = cos(x + 2\pi) \\ sin(x) = sin(x + 2\pi) \end{cases} \quad \Longrightarrow \begin{cases} x\left(t + \frac{2\pi}{\omega}\right) = x(t) \\ \dot{x}\left(t + \frac{2\pi}{\omega}\right) = \dot{x}(t) \end{cases}$$

après un temps $T = \frac{2\pi}{\omega}$ le système revient à sa position initiale, T est la période des oscillations et $\frac{1}{T} = \nu$ est leur fréquence.

Le système est dit harmonique simple :
Harmonique : les solutions sont des sommes de fonctions trigonométriques.
Simple : tous les termes de la solution ont la même fréquence.

L'équation différentielle du mouvement de la masse M décrit un grand nombre de systèmes physiques.

Qu'est ce que ces systèmes ont en commun ?
Pourquoi les systèmes harmoniques sont-ils très répandus ?

2) propriétés

a) $\left(\frac{\partial E}{\partial t}\right) = 0$ avec $E = \frac{1}{2} M\dot{x}^2 + \frac{1}{2} kx^2$

b) Les équations du mouvement sont linéaires :

Si $\ddot{\boldsymbol{x}}_{\mathbf{1}} + \omega^2 x_1 = 0 \quad et\ \ddot{\boldsymbol{x}}_{\mathbf{2}} + \omega^2 x_2 = 0 \Longrightarrow$

$\ddot{(x_1 + x_2)} + \omega^2 (x_1 + x_2) = 0$

Si un système satisfait les conditions a et b, on pourra le réduire à un ensemble d'oscillateurs harmoniques simples et à l'oscillateur hyperbolique : $\ddot{\boldsymbol{x}} - \omega^2 x(t) = 0$

Section I-2 : Linéarité et superposition

Une équation est linéaire si pour toutes solutions $f\ et\ g, \alpha f + \beta g$ est aussi solution pour toute constantes $\alpha\ \ et\ \ \beta$.

Une équations aux dérivées ordinaires (e. d. o.) est de la forme :

$$S(t) + \alpha_0 f(t) + \alpha_1 f(\dot{t}) + \alpha_2 f(\ddot{t}) + \cdots = 0 \qquad **$$

** est dite homogène si $S(t) = 0$, sinon elle est inhomogène.
Etudions le cas homogène : sachant que ** est linéaire, ses solutions engendrent un espace vectoriel.
Cherchons une base, c'est-à-dire un ensemble $\{f_i\}_{i=1,2\ldots}$ tel que toute solution de ** est de la forme :

$$\sum_{i=1}^{n} \gamma_i f_i \quad avec \quad \frac{\partial \gamma_i}{\partial t} = 0$$

On propose comme solution de ** : $f(t) = e^{kt}$
Or $e^k = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{k^n}{n!} \quad et \;\; S(t) = 0$

** devient :

$$\alpha_0 e^{kt} + \alpha_1 k e^{kt} + \alpha_2 k^2 e^{kt} + \alpha_3 k^3 e^{kt} + \cdots = 0$$

D'où $\quad \alpha_0 + \alpha_1 k + \alpha_2 k^2 + \alpha_3 k^3 + \cdots = 0$

polynôme d'ordre n en k.

Dans le cas de l'oscillateur harmonique simple :

$$\alpha_0 = \omega^2, \qquad \alpha_1 = 0 \quad et \quad \alpha_2 = 1 \quad (degr\acute{e}\ 2)$$

$$\Longrightarrow \ddot{f} + \omega^2 f = 0 \quad \Longrightarrow r^2 + \omega^2 = 0 \Longrightarrow r = \pm i\omega$$

$\Longrightarrow$ les solutions sont de la forme :

$$f(t) = Ae^{i\omega t} + Be^{-i\omega t}$$

Rappel -nombres complexes :

$$Z = a + ib, \qquad \bar{Z} = a - ib$$

$$e^{i\theta} = cos\theta + isin\theta \;\; formule\; d'Euler$$

$$e^{i\theta} = 1 + i\theta + \frac{i^2\theta^2}{2!} + \frac{i^3\theta^3}{3!} + \cdots$$

$$= \left(1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} + \cdots\right) + i\left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} \ldots\right)$$

$$= cos\theta + isin\theta$$

$$\begin{cases} cos\theta = \dfrac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \\ sin\theta = \dfrac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \end{cases}$$

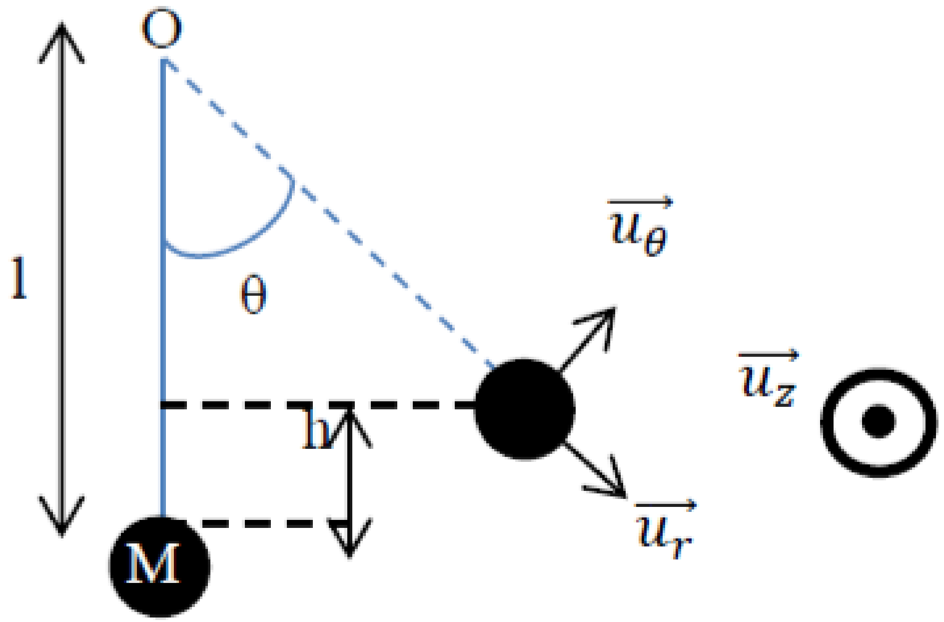
Application 1:

Un pendule simple constitué d’une masse ponctuelle m suspendue à un fil inextensible de longueur l. On néglige toutes les sources de frottements. On note M le centre de gravité de la masse et O le point de fixation du fil. On repère la position du centre de gravité de la masse par l'angle θ entre la verticale et la direction du fil. On écarte le centre de gravité de la masse d’un angle θ_0 et on la lâche sans vitesse. On limite l’étude à des angles θ petits.

1. Faire un bilan des forces appliqué sur M.

2. Décrire le mouvement du centre de gravité de la masse, par application du théorème de l’énergie mécanique,

3. Etudiez le mouvement du centre de gravité de la masse, par application du théorème du moment cinétique



Bilan de force, on a :

Le poids : $\vec{P}$ =$m\vec{g}$ =mgcos(θ)$\vec{u}_r$ −mgsin(θ) $\vec{u}_\theta$

La Tension : $\vec{T}$ du fil =$T_0\vec{u}_r$

Le théorème de l’énergie mécanique :
ΔE_M=$travail\ des\ forces\ non\ conservatives$

Dans cet exemple, il n’y’a pas de frottement, alors pas de forces non conservatives:

ΔE_M=ΔEc+ΔEp

ΔEc=1/2mv^2 $avec\ v$=$l\dot{\theta}$, $\dot{\theta}$ est $la\ vitesse\ angulaire$.

ΔEp=$mgh\ avec\ h$=$l(1-cos(\theta))$ dans le cadre de l’approximation des petits angles on a $cos(\theta)\approx 1-\theta^2/2$

$$\Delta E_M = \frac{1}{2}m\left(l\dot{\theta}\right)^2 + mgl\frac{\theta^2}{2} = 0$$

$$\frac{dE_M}{dt} = ml^2\dot{\theta}\ddot{\theta} + mgl\theta\dot{\theta} = 0$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega_0^2\theta = 0 \ avec\ \omega_0^2 = \frac{g}{l}$$

La solution de l'équation différentielle est:

$\theta(t)$=$A.cos(\omega_0 t)$+$B.sin(\omega_0 t)$

θ(0)=A=θ_0

$\dot{\theta}(t)$=$-\omega_0 A.sin(\omega_0 t)$+$\omega_0 B.cos(\omega_0 t)$

$\dot{\theta}(0)$=ω_0 soit B=0

Finalement
$\theta\ (t) = \theta_0 cos(\omega_0 t)$