Ondes - CC3 2023/2024

Ex. 1 : onde EM

1/ (MT) : $\mathrm{div}(\vec{B}) = 0$

2/ • force de LORENTZ : $\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$ $\Rightarrow \begin{cases} [\vec{E}] = \dfrac{MLT^{-2}}{IT} = MLI^{-1}T^{-3} \\ [\vec{B}] = \dfrac{MLT^{-2}}{IT\,LT^{-1}} = MI^{-1}T^{-2} \end{cases}$

• (MG) : $\mathrm{div}(\vec{E}) = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0}$ $\Rightarrow$ $[\varepsilon_0] = \dfrac{ITL^{-3}}{MLI^{-1}T^{-3}L^{-1}} = T^4 I^2 M^{-1} L^{-3}$; u.SI : $s^4 \cdot A^2 \cdot kg^{-1} \cdot m^{-3}$

• (MA) : $\vec{\mathrm{rot}}(\vec{B}) = \mu_0 \vec{J} + \dots$ $\Rightarrow$ $[\mu_0] = \dfrac{MI^{-1}T^{-2}L^{-1}}{IL^{-2}} = MLI^{-2}T^{-2}$; u.SI : $kg \cdot m \cdot A^{-2} \cdot s^{-2}$

3/ a) $\vec{\mathrm{rot}}[\vec{\mathrm{rot}}(\vec{E})] \overset{(MF)}{=} -\vec{\mathrm{rot}}(\partial_t \vec{B}) = -\partial_t[\vec{\mathrm{rot}}(\vec{B})]$

analyse vect. $\|$ $\qquad$ $\|$ (MA) avec $\vec{J} = \vec{0}$

$\vec{\mathrm{grad}}[\underbrace{\mathrm{div}(\vec{E})}_{\substack{=0 \\ (MG)\text{ avec } \rho = 0}}] - \Delta\vec{E}$ $\qquad$ $-\mu_0\varepsilon_0\partial_t^2\vec{E}$

$\Rightarrow (\mu_0\varepsilon_0\partial_t^2 - \Delta)\vec{E} = \vec{0}$

b) idem : $\vec{\mathrm{rot}}[\vec{\mathrm{rot}}(\vec{B})] \overset{(MA)\text{ avec } \vec{J}=\vec{0}}{=} \mu_0\varepsilon_0\vec{\mathrm{rot}}(\partial_t\vec{E}) = \mu_0\varepsilon_0\partial_t[\vec{\mathrm{rot}}(\vec{E})]$

analyse vect. $\|$ $\qquad$ $\|$ (MF)

$\vec{\mathrm{grad}}[\underbrace{\mathrm{div}(\vec{B})}_{\substack{=0 \\ (MT)}}] - \Delta\vec{B}$ $\qquad$ $-\mu_0\varepsilon_0\partial_t^2\vec{B}$

$\Rightarrow (\mu_0\varepsilon_0\partial_t^2 - \Delta)\vec{B} = \vec{0}$

c) $(\mu_0\varepsilon_0\partial_t^2 - \Delta)\left\{\begin{matrix}\vec{E} \\ \vec{B}\end{matrix}\right. = \vec{0}$ $\qquad$ $\Rightarrow [\mu_0\varepsilon_0]^{-1} = \dfrac{[\partial_t^2]}{[\Delta]} = (LT^{-1})^2 = [c]^2$

où c = vitesse de phase de l'onde EM

$c = (\mu_0\varepsilon_0)^{-1/2} \simeq (10^{-6} \times 9 \times 10^{-12})^{-1/2}\ m \cdot s^{-1} = \dfrac{1}{3} \cdot 10^9\ m \cdot s^{-1} \simeq 3 \cdot 10^8\ m \cdot s^{-1}$

4/ $\vec{E}(x,t) = \vec{u}_y E_0 \cos(\omega t - kx)$; $\vec{B} = \vec{u}_z B_0 \cos(\omega t - kx)$

a) $d\phi = 0 = \omega\,dt - k\,dx$ $\Rightarrow$ $v_\phi = \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{\omega}{k} > 0$: propagation selon la direction x
le sens des $x \nearrow$

b) polarisation : $\vec{E}$ selon y ; $\vec{B}$ selon z

Ex.2 : onde méca

(1) $\left(\frac{1}{c^2}\partial_t^2 - \partial_x^2\right)\Psi(x;t) = 0 \qquad \forall\, x;t$

1/ a) (1) est linéaire ; on peut donc résoudre ds $\mathbb{C}$ puis revenir ds $\mathbb{R}$

Ansatz : $\tilde{\Psi}(x;t) = \tilde{\Psi}_0\, e^{i(\omega t - kx)} \Rightarrow \partial_t^2\tilde{\Psi} = -\omega^2\tilde{\Psi} \;;\; \partial_x^2\tilde{\Psi} = -k^2\tilde{\Psi}$

ds (1) : $\left(-\frac{\omega^2}{c^2} + k^2\right)\tilde{\Psi}(x;t) = 0 \Rightarrow$ soit $\tilde{\Psi}(x;t) = 0\ \forall t \Rightarrow$ pas d'onde $\Rightarrow$ pas gardé

soit $\omega^2 = (ck)^2 \Rightarrow \omega_\pm = \pm\omega = \pm ck$ (2) : relaᵒ de dispersion

avec ω et $k \in \mathbb{R}^{+*}$

b) $v_{\varphi_\pm} = \frac{\omega_\pm}{k} = \frac{d\omega_\pm}{dk} = v_{g\pm}\ (= \pm c) \Rightarrow$ milieu non-dispersif

c) CL des modes propres :

$\tilde{\Psi}(x;t) = \tilde{A}_{++}\, e^{+i(\omega t + kx)} + \tilde{A}_{+-}\, e^{+i(\omega t - kx)} + \tilde{A}_{-+}\, e^{-i(\omega t + kx)} + \tilde{A}_{--}\, e^{-i(\omega t - kx)}$ avec $\tilde{A}_{\pm\pm} \in \mathbb{C}$

2/ Condiᵒˢ aux bords

a) $\forall t,\ \tilde{\Psi}(0;t) = 0 = (\tilde{A}_{++} + \tilde{A}_{+-})\, e^{+i\omega t} + (\tilde{A}_{-+} + \tilde{A}_{--})\, e^{-i\omega t}$

$\Rightarrow \underbrace{(\tilde{A}_{++} + \tilde{A}_{+-})\, e^{2i\omega t}}_{\text{dép. de } t} + \underbrace{(\tilde{A}_{-+} + \tilde{A}_{--})}_{\text{indép de } t} = 0 \Rightarrow$ soit $\omega = 0 \Rightarrow$ pas d'oscillaᵒ temporelle $\Rightarrow$ pas gardé

soit $\tilde{A}_{++} + \tilde{A}_{+-} = 0 \Rightarrow \tilde{A}_{-+} + \tilde{A}_{--} = 0$

$\Rightarrow \tilde{\Psi}(x;t) = \left(\tilde{A}_{++}\, e^{+i\omega t} + \tilde{A}_{--}\, e^{-i\omega t}\right)\underbrace{\left(e^{+ikx} - e^{-ikx}\right)}_{= 2i\sin(kx)} = \left(\tilde{B}_+\, e^{+i\omega t} + \tilde{B}_-\, e^{-i\omega t}\right)\sin(kx)$ avec $\tilde{B}_\pm = 2i\tilde{A}_{\substack{++\\--}}$

$\Rightarrow \Psi(x;t) = \mathrm{Re}[\tilde{\Psi}(x;t)] = \underbrace{[\alpha\cos(\omega t) + \beta\sin(\omega t)]}_{\text{fonc}^{\circ}\text{ de } t}\ \underbrace{\sin(kx)}_{\text{fonc}^{\circ}\text{ de } x}$ (3) avec $\begin{cases}\alpha = \mathrm{Re}(\tilde{B}_+ + \tilde{B}_-)\\ \beta = \mathrm{Im}(-\tilde{B}_+ + \tilde{B}_-)\end{cases}$

↳ découplage tps/espace $\Rightarrow$ onde stationnaire

N.B. : la condiᵒ est $\Psi(0;t) = 0$, pas nécessairement $\tilde{\Psi}$; ici, cela ne change pas le résultat.

b) $\forall t,\ \Psi(L;t) = 0 = [\alpha\cos(\omega t) + \beta\sin(\omega t)]\sin(kL) \Rightarrow$ soit $\alpha = \beta = 0 \Rightarrow$ pas d'onde $\Rightarrow$ pas gardé

soit $\sin(kL) = 0 \Rightarrow k_n = \frac{n\pi}{L}\ ;\ n \in \mathbb{N}^*$ (4)

↳ quantificaᵒ de k

c) (4) et (2) $\Rightarrow \omega_n = ck_n = \frac{n\pi c}{L}$

↳ quantificaᵒ de ω

N.B. : si $n = 0$, $k_0 = 0$ et $\omega_0 = 0 \Rightarrow$ pas d'onde $\Rightarrow$ pas gardé

d) CL des modes propres :

$$\Psi(x;t) = \sum_{n=1}^{+\infty}\left[\alpha_n\cos(\omega_n t) + \beta_n\sin(\omega_n t)\right]\sin(k_n x)$$

(5) $\quad \left(\frac{1}{c^2}\partial_t^2 - \partial_x^2 - \gamma\,\partial_x^4\right)\Psi(x;t) = 0 \quad \forall\, x;t \quad$ avec $\gamma > 0$

3/ a) Idem 1/a) avec $\partial_x^4\,\tilde{\Psi} = k^4\,\tilde{\Psi}$

ds (5) : $\left(-\frac{\omega^2}{c^2} + k^2 - \gamma k^4\right)\tilde{\Psi}(x;t) = 0 \Rightarrow \omega^2 = (ck)^2(1-\gamma k^2)$

$\omega_\pm = \pm\,\omega = \pm\, ck\,(1-\gamma k^2)^{1/2}$ (6) : relat° de dispersion

b) $v_{\phi\pm} = \frac{\omega_\pm}{k} = \pm\, c\,(1-\gamma k^2)^{1/2}$

$v_{g\pm} = \frac{d\omega_\pm}{dk} = v_{\phi\pm} \mp \frac{\gamma c k^2}{(1-\gamma k^2)^{1/2}} = v_{\phi\pm} - \gamma\,\frac{(ck)^2}{v_{\phi\pm}}$ $\Bigg\}$ $\Rightarrow v_{\phi\pm} \neq v_{g\pm}$: milieu dispersif

c) Il faut $\omega \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \omega^2 \geq 0$ sinon une exponentielle réelle apparaît ds Ψ

d) $\quad \hookrightarrow \underbrace{(ck)^2}_{\geq 0}(1-\gamma k^2) \geq 0 \Rightarrow k = \frac{2\pi}{d} \leq \gamma^{-1/2} \Rightarrow d \geq 2\pi\,\gamma^{1/2} = d_c$

N.B. : puisqu'on a aussi $k = k_n = \frac{n\pi}{L}$ avec $n \in \mathbb{N}^*$,
les k (et ω) de l'onde non-atténuée sont bornés.