

## Ondes - DS III

Aucune documentation ni calculatrice permise, durée: 1h30.

Pour obtenir tous vos points, il est important de bien expliquer vos démarches.

### Problème I

Soit une onde électromagnétique se propageant dans le vide, dont le champ électrique est

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \hat{u}_z E_0 e^{i(\omega t - (ax + by))},$$

avec  $E_0, a, b$ , et  $\omega$  des constantes positives.

- Donner la direction de propagation de cette onde.
- Donner la direction de polarisation de l'onde.
- Exprimer  $\omega$  en fonction de  $a, b$ , et de la vitesse de la lumière,  $c$ .
- Exprimer le champ magnétique de l'onde en fonction des données du problème.
- Exprimer le vecteur de Poynting en fonction des données du problème.

### Problème II

On suppose que les vibrations d'une corde de longueur  $L$ , tendue selon l'axe des  $x$ , sont décrites par l'équation:

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 F(x, t)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 F(x, t)}{\partial x^2} = 0, \quad (1)$$

avec  $c > 0$  une constante réelle. On supposera de plus que les deux extrémités de la corde, situées en  $x = 0$  et en  $x = L$ , respectivement, sont fixes ( $F(0, t) = F(L, t) = 0$ ).

- Donner la relation de dispersion de ces ondes; exprimer leur vitesse de phase et leur vitesse de groupe en fonction des données du problème.
- Montrer que les modes propres de cette équation peuvent s'écrire sous la forme

$$F_n(x, t) = \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) e^{i\omega_n t}, \quad (2)$$

avec  $n \in \mathbb{Z}$ .

- c) Exprimer les pulsations propres du système en fonction des données du problème.
- d) Montrer que la solution générale de l'équation (1) peut s'écrire

$$F(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) (a_n \cos(\omega_n t) + b_n \sin(\omega_n t)). \quad (3)$$

- e) Montrer que les paramètres  $a_n$  peuvent s'écrire

$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L F(x, 0) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx. \quad (4)$$

On rappelle l'identité trigonométrique

$$2 \sin(\phi) \sin(\theta) = \cos(\theta - \phi) - \cos(\theta + \phi). \quad (5)$$

- f) On suppose qu'un étudiant mal intentionné fait bouger une des extrémités de la corde de sorte que  $F(0, t) = A \cos(\omega t)$ , avec  $A, \omega$  deux constantes réelles. On supposera de plus que  $\omega$  n'est pas une pulsation propre de la corde. Donner alors la solution générale de l'équation (1). **Indice:** Considérer la fonction  $B \cos(\omega t) \sin(k(L - x))$ , avec  $k$  et  $B$  des constantes à déterminer.