Ondes - Contrôle III

Aucune documentation ni calculatrice permise, durée: 1h30.

Questions courtes

Question 1: Donner la solution générale de l'équation:

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 F(x,t)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 F(x,t)}{\partial x^2} = 0.$$

Question 2: On suppose que les ondes $F(x,t)$ dans un certains milieu obéissent à l'équation suivante:

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 F(x,t)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 F(x,t)}{\partial x^2} + (m^2c^2)F(x,t) = 0.$$

Donner la relation de dispersion pour ces ondes, leur vitesse de phase, ainsi que leur vitesse de groupe.

Question 3: On suppose que les vibrations d'une mince plaque métallique sont décrites par l'équation:

$$\frac{1}{\alpha^2}\frac{\partial^2 F(x,y,t)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 F(x,y,t)}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 F(x,y,t)}{\partial y^2} = 0. \tag{1}$$

En utilisant la méthode de la séparation des variables, montrer que l'équation (1) se réduit au système d'équations aux dérivées ordinaires:

$$\begin{aligned} A''(x) &= -k_x^2 A(x), \\ B''(y) &= -k_y^2 B(y), \\ C''(t) &= -\omega^2 C(t), \end{aligned} \tag{2}$$

où $F(x,y,t) = A(x)B(y)C(t)$. Donner la relation entre les constantes ω, k_x et k_y.

Question longue

Soit une corde tendue selon l'axe des x, dont les extrémités sont fixées aux points $x = 0$ et $x = L$. On suppose que le déplacement vertical de la corde en un point x, au temps t, est décrite par la fonction $F(x,t)$ obéissant à l'équation

$$\frac{\mu}{T_0}\frac{\partial^2 F(x,t)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 F(x,t)}{\partial x^2} = 0,$$

où T_0 est la tension dans la corde, et μ est sa masse linéique.

a) Donner la vitesse de phase de ces ondes.

b) Montrer que la solution générale de cette équation peut s'écrire

$$F(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos(\omega_0 n t) + b_n \sin(\omega_0 n t)\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \tag{3}$$

avec ω_0 une constante à déterminer.

c) Exprimer les coefficients a_n et b_n dans l'équation (3) en fonction des conditions initiales, $F(x,0)$ et $\left(\frac{\partial F(x,t)}{\partial t}\right)_{t=0}$. On rappel que pour toutes paires d'entiers positifs (n,m):

$$\int_0^\Delta \sin\left(\frac{n\pi x}{\Delta}\right) \sin\left(\frac{m\pi x}{\Delta}\right) dx = \delta_{n,m}\frac{\Delta}{2}, \tag{4}$$

$$\int_0^\Delta \cos\left(\frac{n\pi x}{\Delta}\right) \cos\left(\frac{m\pi x}{\Delta}\right) dx = \delta_{n,m}\frac{\Delta}{2}. \tag{5}$$

d) On suppose qu'on a les conditions initiales

$$F(x,0) = \left\{\begin{matrix} x & 0 \leq x \leq L/2, \\ 0 & L/2 < x \leq L \end{matrix}\right\}, \qquad \left(\frac{\partial F(x,t)}{\partial t}\right)_{t=0} = 0. \tag{6}$$

Exprimer les coefficients a_n et b_n dans l'équation (3) en termes des données du problème.