Ondes

PI2-MI — CC2 — 2024/2025

Durée : 1h30' (2h en cas de tiers-temps)

Sont interdits :
- les documents
- les objets électroniques

Seules doivent être rendues :
- la feuille de réponses au QCM :
  - *noircir complètement* la case correspondant à la réponse choisie
  - chaque question ne comporte qu'une seule réponse correcte
  - il n'y a pas de point négatif pour une réponse incorrecte
- le cas échéant, les feuilles de réponses aux questions ouvertes (icône ♣).

Ce document doit comporter 8 pages et 13 questions.

Le barème est donné à titre indicatif et est susceptible d'être modifié.

Oscillateurs couplés, avec murs *(17 points)*

Dans le référentiel terrestre approximé galiléen, on considère la situation suivante :
une chaîne d'atomes est constituée de N atomes identiques, de masse m, espacés d'une distance ℓ_0 à l'équilibre, et reliée à ses extrémités à deux points au repos ($j = 0$ et $j = N + 1$).
L'interaction sur l'atome j est limitée à ses premiers voisins ($j - 1$ et $j + 1$). L'interaction entre deux voisins est modélisée par une force de rappel élastique de raideur k et longueur à vide ℓ_0.

Les atomes peuvent osciller sans frottement selon (Ox), où la position de l'atome j est repérée par la coordonnée $x_j(t)$. On note $X_j(t)$ l'écart à la position d'équilibre de l'atome j, et $\omega_0^2 = \dfrac{k}{m}$

Question 1 [Pb1Q0] *(1 point)*
La force $\overrightarrow{F}_+$ exercée par $j + 1$ sur $j \in [\![1; N]\!]$ s'écrit :

- ■ $-k\left(X_j(t) - X_{j+1}(t)\right)\overrightarrow{u}_x$
- B $+k\left(X_j(t) - X_{j+1}(t)\right)\overrightarrow{u}_x$
- C $-k\left(X_j(t) + X_{j+1}(t)\right)\overrightarrow{u}_x$
- D Aucune des réponses précédentes n'est correcte.

Question 2 [Pb1Q1] *(1 point)*
La force $\overrightarrow{F}_-$ exercée par $j - 1$ sur $j \in [\![1; N]\!]$ s'écrit :

- ■ $-k\left(X_j(t) - X_{j-1}(t)\right)\overrightarrow{u}_x$
- B $+k\left(X_j(t) - X_{j-1}(t)\right)\overrightarrow{u}_x$
- C $-k\left(X_j(t) + X_{j-1}(t)\right)\overrightarrow{u}_x$
- D Aucune des réponses précédentes n'est correcte.

Question 3 [Pb1Q2] *(2 points)*
Avec $X_0 = X_{N+1} = 0\,\forall\,t$, la deuxième loi de NEWTON appliquée à $j \in [\![1; N]\!]$ s'écrit :

- ■ $\ddot{X}_j(t) + \omega_0^2\left\{2X_j(t) - [X_{j-1}(t) + X_{j+1}(t)]\right\} = 0$
- B $\ddot{X}_j(t) + \omega_0^2\left\{2X_j(t) - [X_{j-1}(t) - X_{j+1}(t)]\right\} = 0$
- C $\ddot{X}_j(t) + \omega_0^2\left\{2X_j(t) - [X_{j+1}(t) - X_{j-1}(t)]\right\} = 0$
- D Aucune des réponses précédentes n'est correcte.

Question 4 [Pb1Q3] *(1 point)*
Pour passer à la limite continue, on considère :

- ■ $N \to +\infty\,;\, m \to 0\,;\, \ell_0 \to 0$
- B $N \to 0\,;\, m \to +\infty\,;\, \ell_0 \to 0$
- C $N \to 0\,;\, m \to 0\,;\, \ell_0 \to +\infty$
- D Aucune des réponses précédentes n'est correcte.

Dans la suite de cet exercice, on considère le cas $N = 2$.

Question 5 [`Pb1Q4`] ♣ *(2 points)*
À partir de ce qui précède, donner le système d'équations du mouvement des deux atomes.

Question 6 [`Pb1Q5`] ♣ *(2 points)*
Montrer que ce système peut s'écrire sous la forme matricielle :

$$\ddot{\vec{X}}(t) + \mathcal{M}\,\vec{X}(t) = \vec{0} \tag{1}$$

où $\vec{X}(t) = \begin{pmatrix} X_1(t) \\ X_2(t) \end{pmatrix}$ et $\mathcal{M}$ est une matrice à déterminer.

Question 7 [`Pb1Q6`] ♣ *(2 points)*
Déterminer les valeurs propres $\lambda_\pm$ de $\mathcal{M}$ en fonction de ω_0.
En déduire les pulsations propres $\omega_\pm$ du système.

Question 8 [`Pb1Q7`] ♣ *(2 points)*
Déterminer les vecteurs propres $\vec{V}_\pm$ de $\mathcal{M}$, respectivement associés à $\lambda_\pm$.

Question 9 [`Pb1Q8`] ♣ *(4 points)*
La solution générale de (1) s'écrit sous forme complexe (avec $\tilde{\alpha}_{\pm\pm}$ des constantes $\in \mathbb{C}$) :
$\vec{X}(t) = [\tilde{\alpha}_{++}\exp(+i\omega_+ t) + \tilde{\alpha}_{+-}\exp(-i\omega_+ t)]\,\vec{V}_+ + [\tilde{\alpha}_{-+}\exp(+i\omega_- t) + \tilde{\alpha}_{--}\exp(-i\omega_- t)]\,\vec{V}_-$

À l'instant $t = 0$, les deux atomes sont au repos et les atomes 1 et 2 sont respectivement décalés de a et $-a$ par rapport à leur position d'équilibre (figure ci-dessous).
À partir de la forme réelle de $\vec{X}(t)$, déterminer la forme réelle de $X_1(t)$ et $X_2(t)$.

Oscillateurs couplés, sans murs *(7 points)*

Dans le référentiel terrestre approximé galiléen, on considère la situation suivante :
deux blocs reliés par un ressort idéal de raideur k et longueur à vide ℓ_0 peuvent glisser sans frottement le long d'un axe horizontal. Le bloc $j = \{1; 2\}$ a une masse m_j et sa position est repérée par la coordonnée $x_j(t)$ de son centre d'inertie.
On note $X_j(t)$ l'écart à la position d'équilibre du bloc j, et $\omega_j^2 = \dfrac{k}{m_j}$

Question 10 [Pb2Q0] *(1 point)*
Le système $S = \{\text{blocs} + \text{ressort}\}$ étant pseudo-isolé ($\Sigma \vec{F}_{ext \to S} = \vec{0}$), le mouvement de son centre d'inertie dans tout référentiel galiléen est :

■ rectiligne et uniforme

[B] circulaire et uniforme

[C] rectiligne et non-uniforme

[D] Aucune des réponses précédentes n'est correcte.

Question 11 [Pb2Q1] *(2 points)*
La deuxième loi de NEWTON appliquée à chaque bloc conduit à l'équation du mouvement sous forme matricielle :

$$\ddot{\vec{X}}(t) + \mathcal{M}\,\vec{X}(t) = \vec{0} \tag{2}$$

où $\vec{X}(t) = \begin{pmatrix} X_1(t) \\ X_2(t) \end{pmatrix}$ et $\mathcal{M}$ s'écrit :

■ $\begin{pmatrix} +\omega_1^2 & -\omega_1^2 \\ -\omega_2^2 & +\omega_2^2 \end{pmatrix}$

[B] $\begin{pmatrix} +\omega_1^2 & +\omega_1^2 \\ +\omega_2^2 & +\omega_2^2 \end{pmatrix}$

[C] $\begin{pmatrix} +\omega_1^2 & -\omega_2^2 \\ -\omega_1^2 & +\omega_2^2 \end{pmatrix}$

[D] Aucune des réponses précédentes n'est correcte.

Question 12 [Pb2Q2] *(2 points)*
On considère les modes propres sous la forme complexe $\vec{X}(t) = \exp(i\omega t)\,\vec{V}$
où $\vec{V}$est vecteur propre de $\mathcal{M}$, de valeurs propres :

■ $\begin{cases} \lambda_+ = \omega_1^2 + \omega_2^2 \\ \lambda_- = 0 \end{cases}$

[B] $\begin{cases} \lambda_+ = \omega_1^2 \\ \lambda_- = \omega_2^2 \end{cases}$

[C] $\begin{cases} \lambda_+ = 0 \\ \lambda_- = \omega_1^2 - \omega_2^2 \end{cases}$

[D] Aucune des réponses précédentes n'est correcte.

Question 13 [Pb2Q3] *(2 points)*
Soient $\vec{V}_\pm = \begin{pmatrix} V_{1\pm} \\ V_{2\pm} \end{pmatrix}$ les vecteurs propres de $\mathcal{M}$ associés à $\lambda_\pm$, on obtient :

■ $\begin{cases} m_1\,V_{1+} + m_2\,V_{2+} = 0 \\ V_{1-} - V_{2-} = 0 \end{cases}$

[B] $\begin{cases} V_{1+} - V_{2+} = 0 \\ m_2\,V_{1-} + m_1\,V_{2-} = 0 \end{cases}$

[C] $\begin{cases} m_2\,V_{1+} + m_1\,V_{2+} = 0 \\ V_{1-} + V_{2-} = 0 \end{cases}$

[D] Aucune des réponses précédentes n'est correcte.

Ondes - PI2-MI - CC2 - 2024/2025

NOM : ....

Prénom : ....

Groupe : ....

CODAGE DU N$^{\text{O}}$ ÉTUDIANT
(colorier complètement les cases)

0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9	9

SENS DE REMPLISSAGE →

Réponses au QCM :

Question 1 ■ B C D

Question 2 ■ B C D

Question 3 ■ B C D

Question 4 ■ B C D

Question 10 ■ B C D

Question 11 ■ B C D

Question 12 ■ B C D

Question 13 ■ B C D

Question 5 2pts **PFD : système** ■ ■ ■ *Réservé à l'enseignant(e)*

1pt

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 + \omega_0^2(2x_1 - x_2) = 0 & x_0 = 0 \\ \ddot{x}_2 + \omega_0^2(2x_2 - x_1) = 0 & x_3 = 0 \end{cases}$$

1pt

Question 6 2pts **PFD : matrice** ■ ■ ■ *Réservé à l'enseignant(e)*

$$\begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{pmatrix} + \omega_0^2 \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$M = \omega_0^2 \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\omega_0^2 & -\omega_0^2 \\ -\omega_0^2 & 2\omega_0^2 \end{pmatrix}$$

Question 7 2 pts

$\lambda_\pm$ ■ ■ ■ *Réservé à l'enseignant(e)*

$$M\vec{X} = \lambda \vec{X} \qquad \det\left(M - \lambda I_{d_{2\times 2}}\right) = 0$$

$$\det\begin{pmatrix} 2w_0^2 - \lambda & -w_0^2 \\ -w_0^2 & 2w_0^2 - \lambda \end{pmatrix} = 0$$

$$(2w_0^2 - \lambda)^2 - w_0^4 = 0 \rightarrow 4w_0^4 + \lambda^2 - 4w_0^2\lambda - w_0^4 = 0$$

$$\boxed{\lambda^2 - 4w_0^2\lambda + 3w_0^4 = 0}$$ 1pt

$$\Delta = 4w_0^4, \quad \lambda_- = (4w_0^2 - 2w_0^2) \times \frac{1}{2} = w_0^2 \Rightarrow \boxed{w_- = w_0}$$ 0,5

$$\lambda_+ = (4w_0^2 + 2w_0^2) \times \frac{1}{2} = 3w_0^2 \Rightarrow \boxed{w_+ = w_0\sqrt{3}}$$ 0,5

Question 8 2 pts

$\vec{V}_\pm$ ■ ■ ■ *Réservé à l'enseignant(e)*

$$M\vec{V}_+ = \lambda_+\vec{V}_+ \Rightarrow \begin{pmatrix} 2w_0^2 & -w_0^2 \\ -w_0^2 & 2w_0^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 3w_0^2\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2a - b = 3a \\ \text{et} \\ -a + 2b = 3b \end{cases} \quad \begin{cases} -a - b = 0 \\ -a - b = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{b = -a} \Rightarrow \boxed{\vec{V}_+ = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}}$$ 1pt

De même pour λ_- et $\vec{V}_-$:

$$M\vec{V}_- = \lambda_-\vec{V}_- \Rightarrow \begin{pmatrix} 2w_0^2 & -w_0^2 \\ -w_0^2 & 2w_0^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix} = w_0^2\begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 2a' - b' = a' \\ -a' + 2b' = b' \end{cases} \Rightarrow \boxed{a' = b'} \Rightarrow \boxed{\vec{V}_- = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}$$ 1pt

Question 9 4 pts **Solution particulière** [redacted] *Réservé à l'enseignant(e)*

$\vec{X}(0) = (\tilde{\alpha}_{++} + \tilde{\alpha}_{+-})\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} + (\tilde{\alpha}_{-+} + \tilde{\alpha}_{--})\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a\\-a\end{pmatrix}$

1 pt

$\Rightarrow$ ① $\frac{1}{\sqrt{2}}(\tilde{\alpha}_{++} + \tilde{\alpha}_{+-} + \tilde{\alpha}_{-+} + \tilde{\alpha}_{--}) = a$

et ② $\frac{1}{\sqrt{2}}(-\tilde{\alpha}_{++} - \tilde{\alpha}_{+-} + \tilde{\alpha}_{-+} + \tilde{\alpha}_{--}) = -a$

$\Rightarrow \boxed{\tilde{\alpha}_{-+} = -\tilde{\alpha}_{--}}$ $*$

$\dot{\vec{X}}(0) = (i w_+ \tilde{\alpha}_{++} - i w_+ \tilde{\alpha}_{+-})\vec{V}_+ + (i w_- \tilde{\alpha}_{-+} - i w_- \tilde{\alpha}_{--})\vec{V}_-$

avec $w_+ = w_0\sqrt{3}$, $w_- = w_0$, $\vec{V}_+ = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ et $\vec{V}_- = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ et $\dot{\vec{X}}(0) = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$

$w_0\sqrt{3}\,\tilde{\alpha}_{++} - w_0\sqrt{3}\,\tilde{\alpha}_{+-} + w_0\tilde{\alpha}_{-+} - w_0\tilde{\alpha}_{--} = 0$

$-w_0\sqrt{3}\,\tilde{\alpha}_{++} + w_0\sqrt{3}\,\tilde{\alpha}_{+-} + w_0\tilde{\alpha}_{-+} - w_0\tilde{\alpha}_{--} = 0$

1 pt

③ $\sqrt{3}\,\tilde{\alpha}_{++} - \sqrt{3}\,\tilde{\alpha}_{+-} + \tilde{\alpha}_{-+} - \tilde{\alpha}_{--} = 0$

④ $-\sqrt{3}\,\tilde{\alpha}_{++} + \sqrt{3}\,\tilde{\alpha}_{+-} + \tilde{\alpha}_{-+} - \tilde{\alpha}_{--} = 0$

$\Rightarrow \boxed{\tilde{\alpha}_{-+} = \tilde{\alpha}_{--}}$ $**$

$*$ et $**$ $\Rightarrow \boxed{\tilde{\alpha}_{-+} = \tilde{\alpha}_{--} = 0}$

① − ② $\Rightarrow \cancel{2}(\tilde{\alpha}_{++} + \tilde{\alpha}_{+-}) = a\,\cancel{2}\sqrt{2}$

③ − ④ $\Rightarrow 2\sqrt{3}(\tilde{\alpha}_{++} - \tilde{\alpha}_{+-}) = 0 \Rightarrow \boxed{\tilde{\alpha}_{++} = \tilde{\alpha}_{+-}}$

① $\Rightarrow \frac{2\alpha_{++}}{\sqrt{2}} = a \Rightarrow \boxed{\alpha_{++} = \alpha_{+-} = \frac{a}{\sqrt{2}}}$

$\vec{X} = \frac{a}{\sqrt{2}}\left(e^{i w_0\sqrt{3}t} + e^{-i w_0\sqrt{3}t}\right)\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} = \frac{a}{2}\left(2\cos(w_0\sqrt{3}t)\right)\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$

2 pts

$\begin{cases} x_1(t) = a\cos(w_0\sqrt{3}t) \\ x_2(t) = -a\cos(w_0\sqrt{3}t) \end{cases}$