CC2-Ondes 25 04 24

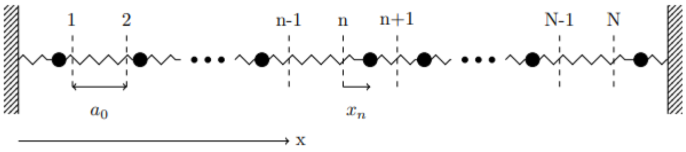
Calculatrices interdites, documents interdits -1h30

Document de deux pages.

PROBLEME I

Une chaine est constituée de N atomes identiques, de même masse m, espacés de la même distance a_0 à l'équilibre et alignés suivant la droite (Ox).

On se place dans le référentiel terrestre supposé galiléen.



Une petite perturbation, modifie l'équilibre initial, elle se déplace de proche en proche le long de la chaine d'atomes et provoque un petit déplacement de chaque atome.

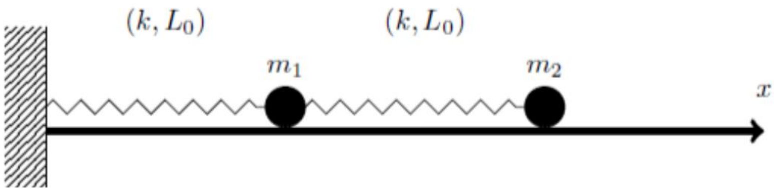
La force d'interaction de chaque atome peut être limitée à ses deux voisins immédiats (n+1 et n-1 pour l'atome n). On modélise cette interaction par une force de rappel élastique de type masse-ressort de constante de raideur k.

Soit x_n la position de l'atome n par rapport à sa position d'équilibre ($1 \leq n \leq N$).

1) Par application de la deuxième loi de Newton à l'atome n, montrer que l'équation du mouvement de ce dernier est : $\ddot{x_n} + \omega^2(2x_n - x_{n-1} - x_{n+1}) = 0$. Avec $\omega^2 = \frac{k}{m}$
2) On s'intéresse à la limite N grand et a petit, soit $F(x,t)$ telle que $F(na_0, t) = x_n(t) = F(x,t)$.
Déduire l'équation d'onde vérifiée par $F(x,t)$ (à démontrer).
3) Identifier une expression homogène à une vitesse. De quelle vitesse s'agit-il ?

PROBLEME II

Deux masses $m_1 et\, m_2$ peuvent se déplacer sans frottements sur un axe horizontal Ox. Elles sont reliées entre elles par un ressort horizontal sans masse de constante de raideur k. La masse de gauche (m_1) est reliée au mur par un ressort horizontal sans masse de constante de raideur k. La longueur au repos de chacun des deux ressorts est L_0. On note $x_1\ \ et\ x_1$les abscisses des deux masses repérées par rapport à leurs positions au repos.
On se place dans le référentiel terrestre supposé galiléen.



1. Ecrire l'expression des forces agissant sur les deux masses : $\vec{F}_1$ et $\vec{F}_2$.
2. En déduire les équations de mouvement écrites sous forme matricielle : $\ddot{\vec{X}} + W\vec{X} = \vec{0}$ où $\vec{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ et W est une matrice à déterminer.

   On pose $\omega_i^2 = \frac{k}{m_i}$.
3. On suppose que $m_1 = m_2 = m$, déterminer les pulsations propres $\omega_\pm$ en fonction de ω avec $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.
4. Démontrer que les vecteurs propres associés aux valeurs propres sont donnés par :
$$\vec{V}_\pm = \begin{pmatrix} \omega_\pm^2 \\ \omega^2 - \omega_\pm^2 \end{pmatrix}$$
5. On admet les expressions des vecteurs propres $\overrightarrow{V_\pm}$ proposés à la question 4, déduire les modes propres associés de ce système.
6. A l'instant initial t=0, les masses sont à leurs positions d'équilibre, la masse de gauche est immobile alors que celle de droite se déplace avec une vitesse $v_0$vers la gauche. Donner la solution des équations du mouvement correspondante.

Fin