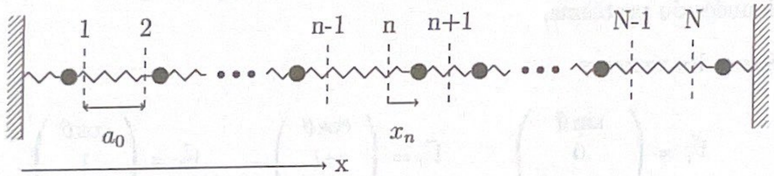
Ondes - DS II

Aucune documentation ni calculatrice permise, durée: 1h30.

Pour obtenir tous vos points, il est important de bien expliquer vos démarches.

Problème I - Questions de cours

Une chaîne d'atomes est constituée de N atomes identiques, de même masse m. À l'équilibre, ces atomes sont espacés de la même distance a_0 et alignés suivant la droite Ox.



Une petite perturbation modifie l'équilibre initial et se déplace de proche en proche le long de la chaîne d'atomes, provoquant un petit déplacement de chaque atome. On suppose que la force d'interaction de chaque atome peut être limitée à ses deux voisins immédiats ($n-1$ et $n+1$ pour l'atome n) et que ces interactions sont de même type que la tension d'un système masse-ressort de constante de raideur k. On supposera également que les atomes ne peuvent pas bouger verticalement. **Soit x_n la position de la masse n par rapport à sa position d'équilibre,** $1 \leq n \leq N$.

a) En appliquant la deuxième loi de Newton, déterminer l'équation du mouvement de la masse n.

b) Soit la fonction $F(x,t)$ telle que

$$F(na_0, t) = x_n, \qquad n = 1, \ldots, N.$$

Montrer que dans la limite où N est grand, et a_0 est petit, la fonction $F(x,t)$ doit satisfaire l'équation

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial^2 t}F(x,t) - \frac{\partial^2}{\partial^2 x}F(x,t) = 0, \qquad (1)$$

avec c une constante à déterminer.

c) Déterminer la vitesse de phase, et la relation de dispersion de ces ondes.

Problème II

On considère un système dont les équations du mouvement sont de la forme

$$\ddot{\vec{X}}(t) + W\vec{X}(t) = \vec{0}, \tag{2}$$

où

$$\vec{X}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix}, \qquad W = \omega^2 \begin{pmatrix} 0 & \cos\theta & 0 \\ \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & \sin\theta & 0 \end{pmatrix}. \tag{3}$$

a) Exprimer λ_1, λ_2, et λ_3, les valeurs propres de la matrice W, en fonction des données du problème.

b) Soient les vecteurs

$$\vec{V}_1 = \begin{pmatrix} \sin\theta \\ 0 \\ -\cos\theta \end{pmatrix}, \qquad \vec{V}_2 = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ -1 \\ \sin\theta \end{pmatrix}, \qquad \vec{V}_3 = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ 1 \\ \sin\theta \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Pour $i = 1, 2, 3$, montrer que $\vec{X}(t) = f(t)\vec{V}_i$ est solution de l'équation (2) si et seulement si $f(t)$ est une solution de l'équation

$$\ddot{f} + \delta_i f = 0, \tag{5}$$

avec une constante δ_i à déterminer en fonction des données du problème.

c) Exprimer la solution générale de l'équation (2) en fonction des vecteurs $\vec{V}_i$ et des constantes δ_i, avec $i = 1, 2, 3$.

d) Donner la solution de l'équation (2) avec les conditions initiales

$$\vec{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \dot{\vec{X}} = \vec{0}. \tag{6}$$