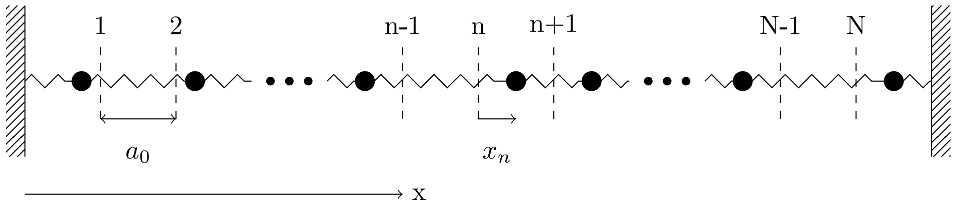
Ondes - Contrôle II

Aucune documentation ni calculatrice permise, durée: 1h30.

1 Une chaîne d'atomes

Une chaîne d'atomes est constituée de N atomes identiques, de même masse m. À l'équilibre, ces atomes sont espacés de la même distance a_0 et alignés suivant la droite Ox.



Une petite perturbation modifie l'équilibre initial et se déplace de proche en proche le long de la chaîne d'atomes, provoquant un petit déplacement de chaque atome. On suppose que la force d'interaction de chaque atome peut être limitée à ses deux voisins immédiats ($n-1$ et $n+1$ pour l'atome n) et que ces interactions sont de même type que la tension d'un système masse-ressort de constante de raideur k. On supposera également que les atomes ne peuvent pas bouger verticalement.
Soit x_n la position de la masse n par rapport à sa position d'équilibre, $1 \leq n \leq N$.

1. Déterminer l'expression de la force de rappel exercée par l'atome $n+1$ sur l'atome n, $f_{n+1\to n}$, en fonction de k, x_n, et x_{n+1}.

2. Déterminer l'expression de la force de rappel exercée par l'atome $n-1$ sur l'atome n, $f_{n-1\to n}$, en fonction de k, x_n, et x_{n-1}.

3. Montrer que l'équation du mouvement de l'atome n peut s'écrire:

$$\ddot{x_n} + \omega_0^2(2x_n - x_{n-1} - x_{n+1}) = 0, \qquad \omega_0^2 = \frac{k}{m}. \tag{1}$$

2 Le cas $N = 2$

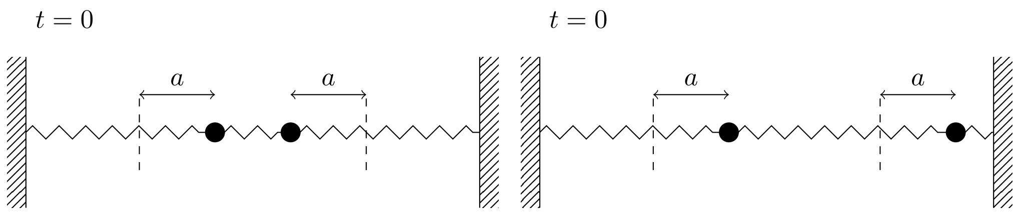
On considère le cas particulier du système précédent où $N = 2$.

1. Donner le système de deux équations différentielles obtenues à partir de l'équation (1) dans le cas particulier où $N = 2$. On admet que $x_0 = x_3 = 0$.

2. Montrer que le système d'équations différentielles précédent peut s'écrire sous forme vectorielle:
$$\frac{d^2}{dt^2}\vec{X}(t) - A\vec{X}(t) = \vec{0}, \qquad \text{où } \vec{X}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}, \tag{2}$$
avec A une matrice à déterminer.

3. Déterminer λ_1 et λ_2, les valeurs propres de la matrice A, en fonction de ω_0^2. En déduire ω_1 et ω_2, les pulsations propres du système, en fonction de ω_0.

4. Déterminer $\vec{V_1}$ et $\vec{V_2}$, les vecteurs propres de A associés à λ_1 et λ_2, respectivement.



(a) (b)

Figure 1: Configurations initiales des masses dans la question 5a) et 5b), respectivement.

5. La solution générale du système peut s'écrire

$$\vec{X}(t) = \left(\alpha e^{i\omega_1 t} + \beta e^{-i\omega_1 t}\right)\vec{V}_1 + \left(\gamma e^{i\omega_2 t} + \delta e^{-i\omega_2 t}\right)\vec{V}_2. \tag{3}$$

   (a) À l'instant intial $t = 0$, la masse de gauche est écartée d'une distance $a > 0$ de sa position d'équilibre alors que la masse de droite est écartée d'une distance $-a < 0$ (voir figure 1a). Les deux masses sont initialement au repos. Exprimer $x_1(t)$ et $x_2(t)$ en fonction des données du problème.

   (b) À l'instant initial $t = 0$, les deux masses sont écartées de leurs positions d'équilibre d'une distance $a > 0$ (voir figure 1b), et sont initialement au repos. Exprimer $x_1(t)$ et $x_2(t)$ en fonction des données du problème.