Ondes

PI2-MI — CC1 — 2024/2025

Durée : 1h30' (2h en cas de tiers-temps)

Sont interdits :
- les documents
- les objets électroniques

Seules doivent être rendues :
- la feuille de réponses au QCM :
  - *noircir complètement* la case correspondant à la réponse choisie
  - chaque question ne comporte qu'une seule réponse correcte
  - il n'y a pas de point négatif pour une réponse incorrecte
- le cas échéant, les feuilles de réponses aux questions ouvertes (icône ♣).

Ce document doit comporter 10 pages et 17 questions.

Le barème est donné à titre indicatif et est susceptible d'être modifié.

Approximation harmonique *(8 points)*

Question 1 [PbAHQ0] ♣ *(2.5 points)*
Soit une énergie potentielle $E_p(r)$ présentant une position d'équilibre stable en r_{eq}.
Montrer qu'au voisinage de r_{eq}, cette énergie peut être approximée par une énergie potentielle de rappel élastique de position d'équilibre r_{eq} et de constante de raideur k.

Question 2 [PbAHQ1] *(0.5 point)*
Par identification, k est égale à :

■ $+\left.\dfrac{\mathrm{d}^2E_p}{\mathrm{d}r^2}\right|_{r_{eq}}$ B $-\left.\dfrac{\mathrm{d}^2E_p}{\mathrm{d}r^2}\right|_{r_{eq}}$ C $+\left.\dfrac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}r}\right|_{r_{eq}}$ D $-\left.\dfrac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}r}\right|_{r_{eq}}$

On peut décrire la vibration d'une molécule diatomique à l'aide d'une énergie potentielle dite de MORSE entre les deux atomes, de la forme :

$$E_p(r) = E_p(R) + D\left\{1 - \exp\left[-a(r-R)\right]\right\}^2$$

où r est la distance entre atomes et D, a et R des constantes positives.

Question 3 [PbAHQ2] *(1 point)*
Les dimensions physique de D et a sont :

- ■ $[D] = \mathrm{M\,L^2\,T^{-2}}$ et $[a] = \mathrm{L^{-1}}$
- B $[D] = [a] = \mathrm{L}$
- C $[D] = \mathrm{M\,L\,T^{-2}}$ et $[a] = \mathrm{L}$
- D $[D] = \mathrm{M\,L\,T^{-2}}$ et $[a] = \mathrm{L^{-1}}$
- E Aucune des réponses précédentes n'est correcte.

Question 4 [PbAHQ3] *(1 point)*
La distance d'équilibre r_{eq} entre les atomes est égale à :

- ■ R
- B $2\,R$
- C $\frac{R}{2}$
- D $\frac{R}{a}$
- E Aucune des réponses précédentes n'est correcte.

Question 5 [PbAHQ4] *(1.5 point)*
Dans le cadre de l'approximation harmonique, k est égale à :

- ■ $2\,a^2\,D$
- B $a^2\,D$
- C $2\,a\,D$
- D $\sqrt{2}\,a^2\,D$
- E Aucune des réponses précédentes n'est correcte.

Question 6 [PbAHQ5] ♣ *(1.5 point)*
Représenter qualitativement $E_p(r)$ en prenant $E_p(R) = 0$.
Vous ferez apparaître r_{eq}, ainsi que les valeurs de E_p en r_{eq} et aux valeurs extrêmes de r.

Oscillateur harmonique *(6 points)*

Dans le référentiel terrestre, approximé galiléen, on considère la situation suivante :
un ressort idéal horizontal de raideur k et longueur à vide ℓ_0 relie un bloc M de masse m à un point fixe H. M peut glisser sans frottement sur le plan horizontal, et sa position est repérée par $x(t)$. La position de M pour le ressort à vide est notée x_0.

Question 7 [`PbOHQ0`] *(1 point)*
La force $\overrightarrow{F}$ du ressort sur M est égale à :

- ■ $-k\,(x-x_0)\,\vec{u}_x$
- B $+k\,(x-x_0)\,\vec{u}_x$
- C $-k\,(x-x_H)\,\vec{u}_x$
- D $+k\,(x-x_H)\,\vec{u}_x$
- E Aucune des réponses précédentes n'est correcte.

Question 8 [`PbOHQ1`] ♣ *(1.5 point)*
Montrer que l'équation du mouvement de M sur l'axe horizontal peut se mettre sous la forme :

$$\ddot{X}(t) + \omega_0^2\,X(t) = 0$$

où X et ω_0 sont à exprimer en fonction des paramètres de l'énoncé.

Question 9 [`PbOHQ2`] *(1 point)*
La solution générale de cette équation peut se mettre sous la forme $X(t) =$

- ■ $\alpha_c\,\cos(\omega_0\,t) + \alpha_s\,\sin(\omega_0\,t)$ où α_c et $\alpha_s = \mathrm{c}^{\mathrm{tes}} \in \mathbb{R}$
- B $\alpha_+\,\exp(+\omega_0\,t) + \alpha_-\,\exp(-\omega_0\,t)$ où α_+ et $\alpha_- = \mathrm{c}^{\mathrm{tes}} \in \mathbb{R}$
- C $\exp(-t/\tau)\,[\alpha_c\,\cos(\omega_0\,t) + \alpha_s\,\sin(\omega_0\,t)]$ où τ, α_c et $\alpha_s = \mathrm{c}^{\mathrm{tes}} \in \mathbb{R}$
- D $\exp(-t/\tau)\,(\alpha_0 + \alpha_1\,t)$ où τ, α_1 et $\alpha_2 = \mathrm{c}^{\mathrm{tes}} \in \mathbb{R}$
- E Aucune des réponses précédentes n'est correcte.

Question 10 [`PbOHQ3`] ♣ *(1.5 point)*
Si $X(t=0) = \beta$ et $\dot{X}(t=0) = 0$, déterminer $X(t)$.

Question 11 [`PbOHQ4`] *(1 point)*
De façon générale, la période T_0 d'un oscillateur harmonique :

- ■ ne dépend que des paramètres du système et pas de son état à un instant donné
- B ne dépend que de l'état du système à un instant donné et pas de ses paramètres
- C dépend des paramètres du système et de son état à un instant donné
- D ne dépend ni des paramètres du système ni de son état à un instant donné

Oscillateur amorti *(8 points)*

On ajoute à l'oscillateur de la section précédente une force de frottement fluide $\vec{f} = -\mu\,\vec{v}$ due à l'air, où α est une constante positive et $\vec{v}$ la vitesse de M par rapport à l'air.

L'équation du mouvement de M sur l'axe horizontal peut alors se mettre sous la forme :

$$\ddot{X}(t) + \Gamma\,\dot{X}(t) + \omega_0^2\,X(t) = 0$$

Question 12 [`PbOAQ0`] *(1 point)*
Le paramètre Γ est égal à :

■ $+\dfrac{\mu}{m}$ B $-\dfrac{\mu}{m}$ C $+\dfrac{k}{m}$ D $-\dfrac{k}{m}$

Question 13 [`PbOAQ1`] *(1 point)*
Au cours du temps, l'amplitude du mouvement d'un oscillateur amorti non-forcé ne peut que :

■ diminuer
B augmenter
C rester constante

On cherche la solution générale de l'équation du mouvement avec l'Ansatz complexe :
$\tilde{X}(t) = \tilde{\alpha}\,\exp(rt)$ où $\tilde{\alpha}$ et $r = \mathrm{c}^{\mathrm{tes}} \in \mathbb{C}$.

Question 14 [`PbOAQ2`] ♣ *(1.5 point)*
Déterminer l'équation caractéristique dont r est solution.

Question 15 [`PbOAQ3`] ♣ *(2.5 points)*
En déduire qu'il existe 3 régimes possibles en fonction d'une condition sur ω_0 à exprimer.
(N.B. : il n'est pas nécessaire d'écrire $X(t)$ de chaque régime.)

Question 16 [`PbOAQ4`] *(1 point)*
Dans le cas du régime sur-amorti (ou apériodique), la solution générale $X(t) = \mathfrak{Re}\left[\tilde{X}(t)\right]$ peut se mettre sous la forme d'une somme :

■ d'exponentielles décroissantes
B d'une exponentielle croissante et d'une exponentielle décroissante
C d'exponentielles croissantes
D de fonctions trigonométriques
E Aucune des réponses précédentes n'est correcte.

Question 17 [`PbOAQ5`] *(1 point)*
Dans le cas du régime sous-amorti (ou pseudo-périodique), on ajoute une force extérieure périodique de pulsation w_d. À la résonance, l'amplitude des oscillations en fonction de w_d est :

■ maximale
B minimale
C nulle
D Aucune des réponses précédentes n'est correcte.

Catalogue

Ondes - PI2-MI - CC1 - 2024/2025

NOM : ....

Prénom : ....

Groupe : ....

CODAGE DU N° ÉTUDIANT
(colorier complètement les cases)

0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9	9

SENS DE REMPLISSAGE →

Réponses au QCM :

Question 2 ■ [B] [C] [D]

Question 3 ■ [B] [C] [D] [E]

Question 4 ■ [B] [C] [D] [E]

Question 5 ■ [B] [C] [D] [E]

Question 7 ■ [B] [C] [D] [E]

Question 9 ■ [B] [C] [D] [E]

Question 11 ■ [B] [C] [D]

Question 12 ■ [B] [C] [D]

Question 13 ■ [B] [C]

Question 16 ■ [B] [C] [D] [E]

Question 17 ■ [B] [C] [D]

Question 1 — **Approx. harm.** *Réservé à l'enseignant(e)*

DL d'ordre 2 en $(r - r_{eq})$
au voisinage de r_{eq} :

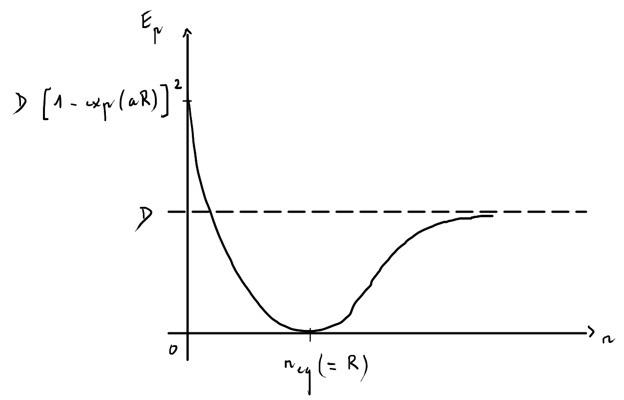
$$E_p(r) \simeq E_p(r_{eq}) + \underbrace{\left.\frac{dE_p}{dr}\right|_{r_{eq}}}_{= 0 \text{ car extremum}} (r - r_{eq}) + \frac{1}{2} \underbrace{\left.\frac{d^2E_p}{dr^2}\right|_{r_{eq}}}_{> 0 \text{ car min}} (r - r_{eq})^2$$

$\updownarrow$

rappel élastique $(k \, ; r_{eq})$:

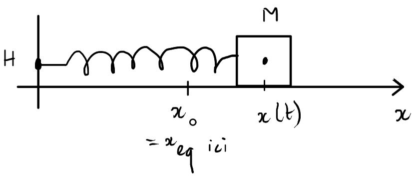
$$E_p(r) = E_p(r_{eq}) + \frac{1}{2} \underbrace{k}_{>0} (r - r_{eq})^2$$

Question 6 — **Graphique $E_p(r)$** *Réservé à l'enseignant(e)*



Question 8 — **Équation osc. harm.** *Réservé à l'enseignant(e)*

ex à t



Ds $\mathcal{R}_T$ = gal, PFD sur M projeté sur $\vec{u}_x$:

$$m\, \ddot{x}(t) = -k\,[x(t) - x_0] = -k\,[x(t) - x_{eq}]$$

$\Rightarrow \quad \ddot{X}(t) + \omega_0^2\, X(t) = 0 \quad$ où $\begin{cases} X(t) = x(t) - x_0 = x(t) - x_{eq} \\ \omega_0^2 = \dfrac{k}{m} \end{cases}$

Question 10 — **$X(t)$ particulière** *Réservé à l'enseignant(e)*

$$\begin{cases} X(t) = \alpha_c \cos(\omega_0 t) + \alpha_s \sin(\omega_0 t) \\ \dot{X}(t) = \omega_0\,[-\alpha_c \sin(\omega_0 t) + \alpha_s \cos(\omega_0 t)] \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} X(t=0) = \beta = \alpha_c \\ \dot{X}(t=0) = 0 = \omega_0 \alpha_s \quad \Rightarrow \quad \alpha_s = 0 \end{cases}$$

Question 14 Équation caract. osc. amorti *Réservé à l'enseignant(e)*

$\ddot{X}(t) + \Gamma \dot{X}(t) + w_0^2 X(t) = 0$

Ansatz : $\tilde{X}(t) = \tilde{\alpha} e^{rt}$

$\Rightarrow \dot{\tilde{X}}(t) = r \tilde{X}(t)$

$\Rightarrow \ddot{\tilde{X}}(t) = r^2 \tilde{X}(t)$

$\Rightarrow (r^2 + \Gamma r + w_0^2)\, \tilde{X}(t) = 0 \quad \forall t$:

$\tilde{X}(t) = 0 \ \forall t \Rightarrow$ pas d'oscilla^{os} $\Rightarrow$ pas gardé

ou

$r^2 + \Gamma r + w_0^2 = 0$ (1) : équa^{o} caractéristique

Question 15 3 régimes *Réservé à l'enseignant(e)*

Solu^{o} de (1) : $r_\pm = -\frac{\Gamma}{2} \pm \left[\left(\frac{\Gamma}{2}\right)^2 - w_0^2\right]^{1/2}$ avec Γ et $w_0 \geq 0$

$\Rightarrow$ 3 régimes selon $\left(\frac{\Gamma}{2}\right)^2 - w_0^2$ $\begin{cases} > \\ = 0 \\ < \end{cases} \Leftrightarrow \frac{\Gamma}{2} \begin{cases} > \\ = \\ < \end{cases} w_0$:

- $>$: s/-amorti (ou apériodique)
- $=$: critique
- $<$: s/s-amorti (ou pseudo-périodique)

Ci-après un espace de rédaction supplémentaire, si besoin.
Le cas échéant, indiquer le numéro de la question traitée.