Ondes

PI2-MI — CC1 — 2023/2024

Durée : 1h30' (2h en cas de tiers-temps)

Sont interdits :
— les documents ;
— tous les objets électroniques (calculatrice, téléphone, tablette, ordinateur...) de même que les montres connectées ;
— les déplacements et les échanges.

Le cas échéant, vos réponses doivent être justifiées.
Une attention particulière sera portée à la qualité et au soin de la rédaction.

Le barème est donné à titre indicatif et est susceptible d'être modifié.

Exercice 1 – Considérations générales *(∼ 7 points)*

Le cas échéant, on se place dans un référentiel galiléen pour les questions qui suivent.

Soit un oscillateur mécanique harmonique (donc pas de frottement), dont l'écart à la position d'équilibre est repéré par la coordonnée $X(t)$.

1. Comment se comporte l'énergie mécanique E_m de l'oscillateur en fonction de t ?
2. Comment se comporte l'énergie potentielle E_p de l'oscillateur en fonction de X ?

On prend comme exemple d'oscillateur harmonique un système {masse-ressort} horizontal de masse m et raideur k.
On pose la solution sous la forme $X(t) = A\,\cos(\omega_0\, t)$.

3. Démontrer l'expression de ω_0 en fonction des paramètres du problème.
   Quelle est sa dimension physique ?

On ajoute au système précédent une force de frottement fluide.

4. Par un argument physique (sans calcul), quelle est la limite de $X(t)$ lorsque $t \to +\infty$?

En plus du frottement visqueux, on ajoute une force extérieure périodique, de pulsation ω_{ext}, dans la direction du mouvement.

5. Expliquer succintement (sans calcul) le concept de résonance d'amplitude.

Exercice 2 – Oscillateur libre amorti *($\sim$ 13 points)*

Dans le référentiel terrestre $\mathcal{R}_T$, approximé galiléen, on considère la situation suivante :
un ressort de raideur k et longueur à vide ℓ_0 est attaché verticalement en un point H immobile. À l'autre extrémité est attaché un objet de masse m et volume V. À tout instant, l'objet est totalement immergé dans un fluide de masse volumique ρ et de coefficient de frottement fluide $\mu > 0$, au repos dans $\mathcal{R}_T$. L'ensemble est plongé dans le champ de pesanteur terrestre $\vec{g}$, de norme g (fig. 1).

Rappel : force de frottement fluide : $\vec{f} = -\mu \vec{v}$ où $\vec{v}$ est la vitesse de l'objet par rapport au fluide.

On cherche à déterminer le mouvement de l'objet, assimilé à celui de son centre d'inertie M. Sa position au cours du temps est repérée par la coordonnée $z(t)$, croissante vers le bas. La position de M pour le ressort à vide est notée z_0.

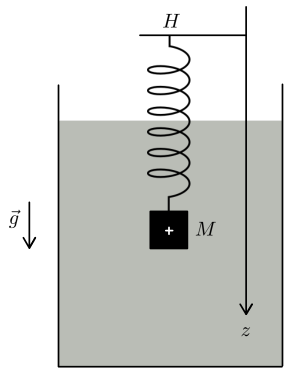

FIGURE 1

1. Faire le bilan des forces sur M et les exprimer en fonction des paramètres du problème et du vecteur unitaire $\vec{u}_z$.
2. En déduire que l'équation du mouvement de M peut se mettre sous la forme :
$$\ddot{z}(t) + \Gamma\,\dot{z}(t) + \omega_0^2\,[z(t) - z_0] - m'\,g = 0 \tag{1}$$
en exprimant Γ, ω_0 et m' en fonction des paramètres du problème.
3. Déterminer la position d'équilibre z_{eq} de l'oscillateur *non-amorti*.
4. En déduire que (1) peut se mettre sous la forme :
$$\ddot{Z}(t) + \Gamma\,\dot{Z}(t) + \omega_0^2\,Z(t) = 0 \qquad \text{où} \qquad Z(t) = z(t) - z_{eq} \tag{2}$$
5. On cherche les solutions de (2) avec l'Ansatz complexe $\tilde{Z}(t) = A\,\mathrm{e}^{rt}$ où A et $r \in \mathbb{C}$.
   a) Établir l'équation caractéristique dont r est solution.
   b) En déduire qu'il existe 3 régimes possibles.
6. Dans le cas du régime *pseudo-périodique* :
   a) Exprimer la solution $Z(t) = \mathfrak{Re}\left[\tilde{Z}(t)\right]$ où $\mathfrak{Re}$ désigne la partie réelle.
   b) Dessiner qualitativement l'allure de $Z(t)$.
   c) Exprimer la pseudo-pulsation et la pseudo-période du mouvement.
   d) Si $Z(t=0) = 0$ et $\dot{Z}(t=0) = v_0$, déterminer $Z(t)$.