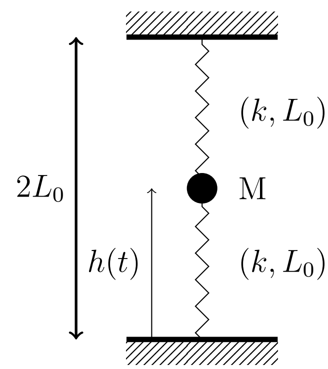
Ondes - DS I

Aucune documentation ni calculatrice permise, durée: 1h30.

Pour obtenir tous vos points, il est important de bien expliquer vos démarches. On remarque également que les différentes parties sont indépendantes. Par exemple, il est possible d'avoir vos points pour la question c), sans répondre à la question a).

On considère une masse ponctuelle M qui est suspendue à un plafond par un ressort idéal, et attachée au sol par un autre ressort idéal. On considère que les deux ressorts ont la même constante de rappel k et la même longueur au repos L_0, et que la hauteur du plafond est $2L_0$. On supposera de plus que la masse ne se déplace que verticalement, selon l'axe des ressorts, et on la repérera par rapport à sa hauteur $h(t)$.



Partie I

On supposera pour le moment que les effets dus au frottement de l'air peuvent être négligés.

a) Faire le bilan des forces qui s'exercent sur la masse M lorsqu'elle est en mouvement.

b) Montrer que l'équation du mouvement du bloc peut être mise sous la forme:

$$\ddot{h}(t) + \omega_0^2 h(t) = h_0, \tag{1}$$

avec h_0 et ω_0 des constantes à exprimer en fonction des données du problème.

c) Donner la solution générale de l'équation (1).

d) En supposant qu'à $t = 0$, la masse est immobile à une hauteur L_0, exprimer la hauteur de la masse au temps $t > 0$ en fonction de ω_0, L_0, et h_0.

Partie II

En tenant compte de l'air, une masse se déplaçant à vitesse $\vec{v}$ subit une force de frottement $\vec{F} = -\gamma\vec{v}$, où γ est une constante positive.

e) Montrer que l'équation du mouvement du bloc peut alors être mise sous la forme:

$$\ddot{h}(t) + \Gamma\dot{h}(t) + \omega_0^2 h(t) = h_0, \tag{2}$$

avec Γ une constante à exprimer en fonction des données du problème.

f) En supposant une solution de la forme

$$h(t) = A + Be^{-i\alpha t}, \tag{3}$$

exprimer les valeurs possibles de A et α en fonction de h_0, ω_0, et Γ.

g) Dire sous quelles conditions l'oscillateur décrit par l'équation (2) est dit *critique*.

h) En supposant que $\omega_0^2 = (\Gamma/2)^2 + 4$, donner la solution générale de l'équation (2).