Département de Mathématiques
Préing 2 - Intégration et Probabilité
2021 - 2022

Dénombrement et Probabilités 2.

Exercice 1. Pour ce rendre au lycée, un éleve a le choix entre quatre itinéraires : A, B, C et D. La posibilité qu'il a de choisir A (resp. B et C) est

$$P(A) = \frac{1}{3} \left(\text{resp. } P(B) = \frac{1}{4},\ P(C) = \frac{1}{12} \right).$$

Soit R l'événement "**arriver en retard**". La probabilité d'arriver en retard en empruntant A (resp. B et C) est

$$P_A(R) = \frac{1}{20} \left(\text{resp. } P_B(R) = \frac{1}{10},\ P_C(R) = \frac{1}{5} \right).$$

En empruntant D il n'est jamais en retard.

1. Quelle est la probabilité que l'élève choisisse l'itinéraire D ?

2. L'élève arrive en retard. Quelle est la probabilité qu'il ait emprunté l'itinéraire C ?

Exercice 2. Un lot de 100 dés contient 25 dés pipés tels que la probabilité d'appatition de 6 soit 0.5. On prend un dé au hasard et on le jette, on obtient 6. Quelle est la probabilité que le dé soit pipé ?

Exercice 3. Un sac contient trois jetons. L'un de ces jetons a deux faces noires, un autre a deux faces blanches le troisième a une face noire et une face blanche. On tire au hasard un jeton du sac et on le pose sur la table. La face visible est noire. Quelle est la probabilité que le jeton tiré ait deux faces noires ?

Exercice 4.

1. Soit X une variable aléatoire réelle discrète prenant les valeurs 1,2,3,4,5,6 avec les probabilités respectives 0.1, 0.2, 0.1, 0.3, 0.1, 0.2. Calculer l'espéreance et la variance de X.
2. Soit Y une variable aléatoire réelle discrète prenant les valeurs $3, 4, 5, 6$. Déterminer la loi de probabilité de Y sachant que

$$P(Y < 5) = \frac{1}{3} \quad ; \quad P(Y > 5) = \frac{1}{2} \quad ; \quad P(Y = 3) = P(Y = 4).$$

   Calculer l'espéreance et la variance de Y.

Exercice 5. On considère un dé cubique truqué de telle sorte que la probabilité d'obtenir la face numéro k soit proportionnelle à k. On suppose que les faces sont numérotées de 1 à 6.

1. Déterminer la loi de X
2. Calculer $E(X)$.
3. On pose $Y = \frac{1}{X}$. Déterminer la loi de Y et $E(Y)$.

Exercice 6. Soient a un réel et X une variable aléatoire réelle à valeurs dans $\mathbb{N}$, telle que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $P(X = k) = \frac{a}{2^k k!}$.

1. Déterminer a.

2. X admet-elle une espérance ? Si oui, la calculer.
3. X admet-elle une variance ? Si oui, la calculer.

Exercice 7. Une urne contient deux boules blanches et quatre boules noires. On tire les boules une à une sans les remetre jusqu'à ce qu'il ne reste que des boules d'une seule couleur dans l'urne. Soit X le nombre de tirages nécessaires. Quelle est la loi de X ?

Exercice 8 On dispose de n urnes numérotées de 1 à n, l'urne numérotée k comprenant k boules numérotées de 1 à k. On choisit d'abord une urne, puis une boule dans cette urne, et on note Y la variable aléatoire du numéro obtenu. Quelle est la loi de Y ? Son espérance ?

Exercice 9 Dans une population 40% des individus ont les yeux bruns, 25% des individus ont les cheveux blonds, 15% des individus ont les yeux bruns et les cheveux blonds.
On choisit un individu au hasard. Calculez :

1. La probabilité de l'événement : si un individu a les yeux bruns d'avoir les cheveux blonds.
2. La probabilité de l'événement : si un individu a les cheveux blonds d'avoir les yeux bruns.
3. La probabilité de l'événement : si un individu a les cheveux blonds, de ne pas avoir les yeux bruns.

Exercice 10 Un professeur oublie fréquemment ses clés. Pour tout n, on note : E_n l'événement

$$E_n \quad = \quad \textbf{le jour } n\textbf{, le professeur oublie ses clés.}$$

Notons aussi

$$P_n = P(E_n) \quad \text{et} \quad Q_n = P(\overline{E_n}).$$

On suppose que : $P_1 = a$ est donné et que si le jour n il oublie ses clés, le jour suivant il les oublie avec la probabilité $\frac{1}{10}$; si le jour n il n'oublie pas ses clés, le jour suivant il les oublie avec la probabilité $\frac{4}{10}$.
Montrer que

$$P_{n+1} = \frac{1}{10}P_n + \frac{4}{10}Q_n.$$

En déduire une relation entre P_{n+1} et P_n. Quelle est la probabilité de l'événement : **le jour n, le professeur oublie ses clés ?**.

Exercice 11 Une information est transmise à l'intérieur d'une population. Avec une probabilité p, l'information reçue d'une personne est transmise telle quelle à la personne suivante. Avec une probabilité $1 - p$, l'information reçue d'une personne est transmise de façon contraire à la personne suivante. On note p_n la probabilité que l'information après n transmissions soit correcte.

1. Donner une relation de récurrence entre p_{n+1} et p_n.
2. En déduire la valeur de p_n en fonction de p et de n.
3. En déduire la valeur de $\lim_{n\to+\infty} p_n$. Qu'en pensez-vous ?