TD5 - Variables aléatoires

Variables aléatoires discrètes

Exercice 1
1. Soit X une variable aléatoire réelle discrète prenant les valeurs 1, 2, 3, 4, 5 et 6 avec les probabilités respectives $0,1$; $0,2$; $0,1$; $0,3$; $0,1$ et $0,2$. Calculer l'espérance et la variance de X.
2. Soit Y une variable aléatoire réelle discrète prenant les valeurs 3, 4, 5 et 6. Déterminer la loi de probabilité de Y sachant que $\mathbb{P}(Y < 5) = \frac{1}{3}$, $\mathbb{P}(Y > 5) = \frac{1}{2}$ et $\mathbb{P}(Y = 3) = \mathbb{P}(Y = 4)$. Calculer l'espérance et la variance de Y.

Exercice 2
On considère un dé cubique truqué de telle sorte que la probabilité d'obtenir la face numéro k soit proportionnelle à k. On suppose que les faces sont numérotées de 1 à 6 et on note la variable aléatoire X associée à la valeur d'un lancer.

1. Déterminer la loi de X.
2. Calculer $\mathbb{E}[X]$.
3. On pose $Y = \frac{1}{X}$. Déterminer la loi de Y et $\mathbb{E}[Y]$.

Exercice 3
Une urne contient deux boules blanches et quatre boules noires. On tire les boules une à une sans les remettre jusqu'à ce qu'il ne reste que des boules d'une seule couleur dans l'urne. Soit X le nombre de tirages nécessaires. Quelle est la loi de X?

Exercice 4
On considère l'expérience suivante. Pour un entier $n > 0$ fixé, on tire simultanément n dés équilibrés. On pose la variable X_n qui associe une victoire s'il y a au moins un 6, et une défaite sinon.

1. Quelle est la loi de X_n? Quel est son paramètre?
2. Quel est le nombre minimum n_0 de dés nécessaires pour qu'en moyenne, on ait 1 chance sur 2 de gagner? Donner la variance de X_{n_0}.

Exercice 5
Soit a un réel et X une variable aléatoire réelle à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(X = k) = \dfrac{a}{2^k k!}$.

1. Déterminer a.
2. X admet-elle une espérance? Si oui, la calculer.
3. X admet-elle une variance? Si oui, la calculer.

Exercice 6
Soit une variable aléatoire X suivant une loi de Poisson de paramètre λ. On pose la variable aléatoire $Y := \dfrac{1}{(X+1)(X+2)}$. Calculer l'espérance de Y.

Exercice 7
On demande à 10 personnes si elles aiment le chocolat. La probabilité qu'un individu réponde oui est de $p = 0,9$. On s'intéresse au nombre total de personnes aimant le chocolat dans notre échantillon.

1. Modéliser la situation par un univers Ω et une variable aléatoire X définie sur cet univers pour répondre au problème.

2. Quelle est la loi suivie par la variable aléatoire?

3. En moyenne, combien de personnes devraient répondre qu'elles aiment le chocolat? On redémontrera la formule utilisée.

4. Quelle est la variance de X? On redémontrera la formule utilisée.

5. Quelle est la probabilité pour qu'au moins 9 personnes disent qu'elles aiment le chocolat?

Exercice 8
Un pêcheur pêche des saumons. Il n'a le droit de garder un saumon que s'il mesure au moins 50cm. Dans l'étang dans lequel il pêche, un dixième des saumons mesure plus de 50cm. On souhaite savoir combien de fois le pêcheur doit lancer son hameçon avant de pêcher un saumon qu'il peut garder.

1. Définir la variable aléatoire modélisant le problème. Quelle est sa loi?

2. Quelle est la probabilité que le pêcheur ait un saumon de bonne taille dès le premier lancer?

3. Quelle est la probabilité pour que le premier saumon de taille suffisante soit pêché au deuxième lancer? Et au troisième?

4. Combien de fois en moyenne le pêcheur doit-il lancer son hameçon pour trouver le bon poisson?

5. Quelle est la probabilité que le pêcheur ait besoin d'au moins 13 lancers?

6. Durant les 12 premiers lancers, le pêcheur n'a obtenu que des poissons de petite taille. Combien de temps, en moyenne, doit-il de nouveau lancer son hameçon pour obtenir un saumon de bonne taille?

Exercice 9
Soit $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace de probabilité fini, $\beta \in [0;1]$ et $X : \Omega \to \{-2, \cdots, 3\}$ une variable aléatoire. Soit le tableau suivant

k	-2	-1	0	1	2	3
$\mathbb{P}_X(k)$	$0,1$	$0,15$	$0,2$	$0,25$	$0,1$	β

1. Déterminer β pour que $\mathbb{P}_X$ soit la loi de probabilité de X.

2. Calculer $\mathbb{E}[X]$ et $\mathrm{Var}(X)$.

3. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire $Z = X^2$.

4. Calculer $\mathbb{E}[Z]$ et $\mathrm{Var}(Z)$.

5. En déduire $\mathbb{E}[2X^2+1]$ et $\mathrm{Var}(2X^2+1)$.

Couple de Variables Aléatoires

Exercice 10
On lance deux dés tétraédriques (à quatre faces) équilibrés avec des valeurs de 1 à 4. On note X la valeur du premier dé et Y la valeur du second dé. De plus, on note Z_1 la minimum des deux valeurs et Z_2 le maximum des deux valeurs.

1. Quelles sont les lois de X et de Y? Sont-elles indépendantes? Dresser le tableau représentant la loi du couple (X, Y).

2. Donner les lois de Z_1 et de Z_2.

3. Dresser le tableau représentant la loi du couple (Z_1, Z_2). Les variables Z_1 et Z_2 sont-elles indépendantes?

Exercice 11
On place dans une urne 48 boules de couleurs différentes et de valeurs différentes avec la répartition suivante:

- 3 boules rouges d'une valeur de 0 point.
- 13 boules rouges d'une valeur de 2 points.
- 7 boules jaunes d'une valeur de 1 point.
- 5 boules jaunes d'une valeur de 2 points.
- 4 boules jaunes d'une valeur de 3 points.
- 3 boules bleues d'une valeur de 0 point.
- 11 boules bleues d'une valeur de 1 point.
- 2 boules bleues d'une valeur de 3 point.

On note X la variable aléatoire représentant la valeur de la boule tirée, et Y la variable aléatoire représentant la couleur de la boule tirée.

1. Quelles sont les valeurs prises par X? Et par Y?
2. Dresser le tableau représentant la loi du couple (X, Y).
3. Déterminer les lois marginales de X et de Y.
4. Comment s'appelle la loi suivie par Y?
5. La variable aléatoire X suit une loi binomiale. Quel est son paramètre?
6. Les deux variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes?
7. On tire une boule : elle est bleue. Quelle est la probabilité pour que la valeur soit 0?
8. BONUS : Sachant qu'on a tiré une boule bleue, déterminer l'espérance de la valeur de la boule.

Exercice 12
On lance un dé équilibré à quatre faces. Si le résultat du lancer est $k \in \{1, 2, 3, 4\}$, on met dans une urne k boules rouges et $10 - k$ boules noires. On tire ensuite une boule dans cette urne. On note par X la variable aléatoire représentant la valeur du dé et Y la couleur de la boule.

1. Quelles sont les valeurs prises par X? Et par Y? Et par le couple (X, Y)?
2. Déterminer la loi de X. Quel est le nom de cette loi?
3. Soit $k \in \{1, 2, 3, 4\}$. Déterminer les probabilités conditionnelles
$$\mathbb{P}(Y = R|X = k) \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(Y = N|X = k).$$
4. Déterminer pour tout $k \in \{1, 2, 3, 4\}$ les valeurs de $\mathbb{P}(X = k \cap Y = R)$ et $\mathbb{P}(X = k \cap Y = N)$.
5. Dresser le tableau du couple de loi (X, Y).
6. En déduire les lois marginales de X et de Y.
7. On suppose que l'on a tiré une boule noire. Quelle est la probabilité d'avoir tiré un 1?

Exercice 13
Partie I Dans $\mathbb{R}^2$, on note les points $A = (2, 2)$, $B = (-2, 2)$, $C = (-2, -2)$ et $D = (2, -2)$. Soit $\mathcal{C}$ le carré (plein) de sommets A, B, C et D. On note l'ensemble des points à coordonnées entières dans $\mathcal{C}$ (y compris sur le bord du carré) par
$$E = \left\{(x, y) \in \mathbb{Z}^2;\ (x, y) \in \mathcal{C}\right\}.$$

1. Faire une représentation graphique de $\mathcal{C}$ et de E. Quel est le cardinal de E?
2. On définit la probabilité $\mathbb{P}$ sur $\mathbb{Z}^2$ qui vaut une constante λ si $(x, y) \in E$ et 0 sinon. Que vaut λ?

3. Soit X (respectivement Y) la variable aléatoire représentant l'abscisse (resp. l'ordonnée) d'un point $(x,y) \in \mathbb{Z}^2$. Quelle est la loi du couple (X,Y)?
4. Quelles sont les valeurs prises par X? et par Y? Dresser le tableau donnant la loi du couple (X,Y).
5. Donner les lois marginales de X et de Y.
6. Calculer l'espérance de X puis celle de Y. Déterminer ensuite la covariance $\mathrm{Cov}(X,Y)$.
7. Les deux variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes? Commenter avec la question précédente.

Partie II Dans $\mathbb{R}^2$, on note les points $\tilde{A} = (2,0)$, $\tilde{B} = (0,2)$, $\tilde{C} = (-2,0)$ et $\tilde{D} = (0,-2)$. Soit $\tilde{\mathcal{C}}$ le carré (plein) de sommets $\tilde{A}$, $\tilde{B}$, $\tilde{C}$ et $\tilde{D}$. On note l'ensemble des points à coordonnées entières dans $\tilde{\mathcal{C}}$ (y compris sur le bord du carré) par

$$\tilde{E} = \left\{(x,y) \in \mathbb{Z}^2;\ (x,y) \in \tilde{\mathcal{C}}\right\}.$$

1. Faire une représentation graphique de $\tilde{\mathcal{C}}$ et de $\tilde{E}$. Quel est le cardinal de $\tilde{E}$?
2. On définit la probabilité $\tilde{\mathbb{P}}$ sur $\mathbb{Z}^2$ qui vaut une constante $\tilde{\lambda}$ si $(x,y) \in \tilde{E}$ et 0 sinon. Que vaut $\tilde{\lambda}$?
3. Soit $\tilde{X}$ (respectivement $\tilde{Y}$) la variable aléatoire représentant l'abscisse (resp. l'ordonnée) d'un point (x,y). Quelle est la loi du couple $(\tilde{X},\tilde{Y})$?
4. Quelles sont les valeurs prises par $\tilde{X}$? et par $\tilde{Y}$? Dresser le tableau donnant la loi du couple $(\tilde{X},\tilde{Y})$.
5. Donner les lois marginales de $\tilde{X}$ et de $\tilde{Y}$ à l'aide du tableau. Retrouver par le calcul les probabilités des événements $(\tilde{X} = -2)$ et $(\tilde{Y} = 0)$.
6. Calculer l'espérance de $\tilde{X}$ puis celle de $\tilde{Y}$. Déterminer ensuite la covariance $\mathrm{Cov}(\tilde{X},\tilde{Y})$.
7. Les deux variables aléatoires $\tilde{X}$ et $\tilde{Y}$ sont-elles indépendantes? Commenter avec la question précédente.

Variables aléatoires continues

Exercice 14
Un enseignant commande en ligne un nouveau lot de feutres. Le livreur lui annonce qu'il livrera son colis le 29 février 2028, mais son horaire de passage est aléatoire entre 8h et 18h.

1. Quelle est la loi suivie par l'horaire d'arrivée du livreur? On nommera cette variable aléatoire X.
2. Déterminer la fonction de densité, la fonction de répartition, l'espérance et la variance de X.
3. Quelle est la probabilité que le colis soit livré au moment de la pause déjeuner, donc entre 12h et 14h?
4. Quelle est la probabilité que le colis soit livré à 17h exactement?

Exercice 15
On note X la durée de vie d'une ampoule à incandescence et Y la durée de vie d'une ampoule à filament LED. Les durées de vie sont des variables aléatoires suivant une loi exponentielle, et en moyenne, on observe que la durée de vie d'une ampoule à incandescence est de 1500h, alors que la durée de vie d'une ampoule à filament LED est de 17500h.

1. Quels sont les paramètres de chacune des lois? Déterminer les variances $\mathrm{Var}(X_1)$ et $\mathrm{Var}(X_2)$.
2. Quelle est la probabilité pour que la durée de vie d'une ampoule à filament LED soit supérieure à 15000h? Et à 20000h?
3. Sachant qu'une ampoule à incandescence a été allumée 1000h, calculer la probabilité que la durée de vie de l'ampoule soit supérieure à 5000h.
4. On considère deux ampoules, une de chaque type. Quelle est la probabilité que la durée de vie de l'ampoule à incandescence soit supérieure à celle de l'ampoule à filament LED?

Exercice 16
Soit une variable aléatoire X suivant une loi normale centrée réduite. On pose $Z = m + \sigma X$ avec $m \in \mathbb{R}$ et $\sigma > 0$. Déterminer l'espérance et la variance de Z.