TD3 - Intégrales multiples

Applications du cours

Exercice 1
Calculer de deux manières différentes l'intégrale suivante (un calcul direct ou à l'aide d'une formule de trigonométrie)

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x+y)dxdy.$$

Exercice 2
Soit $a > 0$ et soit K le compact limité par les côtés du triangle OAB avec $A(2a, a)$ et $B(3a, 3a)$. À l'aide d'une intégration par tranches, calculer

$$\iint_K xydxdy.$$

Retrouver ensuite ce résultat à l'aide d'une intégration par piles.

Exercice 3
Calculer l'aire de la surface délimitée par l'ellipse d'équation $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ avec $a > 0, b > 0$.

Exercice 4
Grâce à un changement de variable en polaire, calculer $\left(\displaystyle\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2}x^2}dx\right)^2$, puis déterminer la valeur de l'intégrale de Gauss

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2}x^2}dx.$$

Exercices classiques

Exercice 5
Soit D le domaine délimité par les deux courbes d'équation

$$y^2 = 4x + 4 \text{ et } y^2 = -4x + 4.$$

1. Représenter graphiquement D.
2. Calculer l'aire du domaine D.

Exercice 6
Calculer l'intégrale $\displaystyle\iint_\Delta f(x, y)dxdy$ dans les cas suivants.

1. $f(x, y) = xy^2$ et Δ le disque délimité par le cercle d'équation $x^2 + y^2 - 2Rx = 0$, $R > 0$;
2. $f(x, y) = x^2 + y^2$ et $\Delta = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1\right\}$ avec $a > 0$, $b > 0$.
3. $f(x, y) = \dfrac{(x+y)^2}{x^2 + y^2 + 1}$ et $\Delta = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2 + y^2 \leq 1\}$.

4. $f(x,y)=xy$ et Δ est la partie du plan délimitée par

$$y=x^2 \text{ et } x=y^2.$$

Exercice 7 1. Soit $0<a<b$ et $f(x)=\displaystyle\int_{s=a}^{b} x^s ds$ sur $\mathbb{R}_+^\star$. Calculer une expression explicite de f.

2. En se ramenant à une intégrale double, déterminer la valeur de

$$I=\int_0^1 \frac{x^b-x^a}{\ln(x)}dx.$$

Exercices supplémentaires

Exercice 8 (*)
Déterminer la valeur de $I=\iint_{[0;1]^2}|x-y|dxdy$.

Exercice 9 (**)
Soit $0<a<b$ et

$$K=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ a\leq x+y\leq b \text{ et } \frac{1}{3}\leq\frac{y}{x}\leq 3\right\}.$$

Calculer

$$\iint_K \frac{\exp\left(-(x+y)\right)}{\sqrt{xy}}dxdy.$$

Indication : on pourra effectuer le changement de variables : $u=x+y$ et $v=\frac{y}{x+y}$.