Département de Mathématiques

Préing 2 - Intégration et Probabilité

2021 - 2022

TD 3 - Intégrales Curvilignes

Exercice 1. On considère la forme différentielle de degré 1 définie par :

$$\omega \;=\; \frac{2x}{y}dx - \frac{x^2}{y^2}dy$$

sur

$$U = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\right\}.$$

1. Montrer que ω est fermée sur U.
2. Montrer de deux façons différentes que ω est exacte.
3. Calculer

$$\int_C \omega,$$

où (C) est une courbe $\mathcal{C}^1$ par morceaux d'origine $A = (1,2)$ et d'extrémité $B = (3,8)$.

Exercice 2.

1. Soit

$$\omega = x^2dx + y^2dy.$$

Calculer l'intégrale de ω le long de tout cercle du plan parcouru une fois dans le sens trigonométrique.

2. Soit

$$\omega = (y+z)dx + (z+x)dy + (x+y)dz$$

Calculer l'intégrale de ω le long du cercle (C) de l'espace :

$$\left\{\begin{array}{r} x^2+y^2+z^2 = 1 \\ x+y+z = 0 \end{array}\right.$$

Exercice 3. Calculer l'intégrale curviligne :

$$\int_\Gamma y^2dx + x^2dy,$$

lorsque Γ est l'une des courbes suivantes :

1. $x^2 + y^2 - ay = 0$.
2. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$.
3. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{2x}{a} - \frac{2y}{b} = 0$.

Exercice 4. Calculer l'intégrale curviligne :

$$\int_\Gamma (xy^2 + y)dx + x^2dy$$

où Γ est le chemin ACB avec :

$$A = (1,1) \quad ; \quad C = (2,1) \quad ; \quad B = (2,2).$$

Exercice 5. Calculer de 2 façons différentes l'intégrale double :

$$\int\int_{\Delta} \left(2x^3 - y\right) dxdy.$$

où

$$\Delta = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \; x \geq 0, \; y \geq 0 \; \text{ et } \; \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1\right\}$$

Exercice 6.

1. Calculer l'intégrale curviligne :

$$\int_{\Gamma} \sqrt{x}dy - (\sqrt{x}\ln(x+1))dx.$$

   sur la courbe :

$$\Gamma \;=\; \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \; 0 \leq x \leq 1 \quad \text{et} \quad y = (x-1)\ln(x+1)\right\}.$$

2. Calculer l'intégrale curviligne I le long de la boucle fermée constituée par les deux arcs de parabole $y = x^2$ et $x = y^2$ décrite dans le sens direct.

$$I = \int_{\Gamma} (2xy - x^2)dx + (x + y^2)dy$$

   Vérifier le résultat en utilisant la formule de Green-Riemann.

3. Calculer l'intégrale :

$$\int\int_{D} (x^2 - y^2)dxdy$$

   où D est le domaine du plan défini par :

$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \; x \geq 0, \; y \geq 0 \quad \text{et} \quad x^2 + y^2 \leq R^2\right\}.$$

Exercice 7. Soit D l'ensemble des éléments (x, y) de $\mathbb{R}^2$, tels que :

$$0 < x < 1, \; 0 < y < 1 \quad \text{et} \quad x^2 + y^2 > 1.$$

Calculer l'intégrale suivante en utilisant la formule de Green-Riemann :

$$I = \int\int_{D} \frac{xy}{\left(1 + x^2 + y^2\right)^2} dxdy.$$

Exercice 8. On considère la forme différentielle

$$\omega = -\frac{y}{x^2 + y^2}dx \; + \; \frac{x}{x^2 + y^2}dy.$$

1. Dans quel domaine cette forme différentielle est-elle définie ?
2. Calculer l'intégrale curviligne

$$\int_{C} -\frac{y}{x^2 + y^2}dx \; + \; \frac{x}{x^2 + y^2}dy$$

   où C est le cercle de centre O et de rayon 1, parcouru dans le sens direct.
3. La forme ω est-elle exacte ?

Exercice 9. Déterminer si les formes différentielles suivantes sont fermées, exactes (dans ce cas, donner une primitive) :

1. $\omega = (x^2 + 3y)dx \ + \ (-y^3)dy$
2. $\omega = xydx - zdy + xzdz.$
3. $\omega = x^3dx + y^3dy + z^3dz.$

Exercice 10. On considère ω la forme différentielle déffinie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$\omega = (x^2 + y^2 - a^2)dx - 2aydy, \quad \text{où } a \in \mathbb{R}^\times.$$

1. Prouver que la forme différentielle n'est pas exacte.
2. Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On pose

$$\alpha(x, y) = f(x)\omega(x, y).$$

   Quelle condition doit vériffieer la fonction f pour que la forme différentielle α soit exacte ? Cette condition est-elle suffisante ? Déterminer une fonction f vériffiant la condition précédente.
3. Calculer une primitive de α sur $\mathbb{R}^2$.
4. Soit Γ le cercle de rayon $\mathbb{R}$ et de centre $(0, 0)$. Déterminer $\int_\Gamma \alpha$.

Exercice 11. En utilisant la formule de Green, calculer :

1. l'aire de l'ellipse :

$$\frac{x^2}{a^2} \ + \ \frac{y^2}{b^2} \leq 1.$$

2. l'aire du domaine délimité par les axes (Ox), (Oy) et la courbe paramétrée par

$$x \ = \ a\cos^3 t, \ y = a\sin^3 t, \quad t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

Exercice 12.

1. Calculer l'intégrale de la forme différentielle

$$\omega = \frac{e^{-y}}{x^2 + y^2}((x \sin x - y \cos x)dx + (x \cos x + y \sin x)dy)$$

   le long du contour orienté dans le sens direct :

$$\Gamma \ = \ \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4,$$

   avec

$$\begin{aligned}
\Gamma_1 &= \{(x, 0) : r \leq x \leq R\} \\
\Gamma_2 &= \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ y \geq 0, \ x^2 + y^2 = r^2\right\} \\
\Gamma_3 &= \{(x, 0) : -R \leq x \leq -r\} \\
\Gamma_4 &= \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ y \geq 0, \ x^2 + y^2 = R^2\right\}.
\end{aligned}$$

2. En déduire $\int_r^R \frac{\sin x}{x} dx$ en fonction d'une autre intégrale.
3. En faisant tendre r vers 0 et R vers $+\infty$, déterminer la valeur de $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$.