**E.I.S.T.I. - Département Mathématiques**
$2^e$ **Année Classe Préparatoire**

T.D. MATHEMATIQUES CPI. II

**T.D.** $n^\circ$ 2 **Intégrales Généralisées**
le 02 mars 2020

**Ex.1**

a) Montrer que l'integrale suivante est convergente et la calculer.

$$I = \int_0^{+\infty} t^2 \exp(-t) dt$$

b) Nature de l'intégrale :

$$J = \int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2 - 1} dx \ .$$

**Ex.2**

a) Soit $k \in \mathbb{R}$; montrer que l'integrale suivante est absolument convergente, pour $k < 0$ :

$$I = \int_1^{+\infty} t^{k-1} \cos t dt.$$

En déduire que l'intégrale,

$$J = \int_1^{+\infty} t^k \sin t dt, \quad \text{est définie pour} \quad K < 0.$$

b) Utiliser le résultat précédent pour étudier l'intégrale :

$$K = \int_1^{+\infty} \sqrt{t} \sin(t^2) dt \ .$$

**Ex.3**

On pose

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x) dx$$

a) Montrer que l'integrale $I$ est convergente.

b) Montrer que :

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos x) dx, \qquad \text{et que} \qquad I = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\frac{1}{2} \sin(2x)) dx,$$

c) Montrer que :

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin 2x) dx,$$

d) Déduire de b) et c) la valeur de I.

**Ex.4**

On considère l'intégrale :

$$I = \int_0^{+\infty} t^{\alpha} \exp(-t) dt$$

où $\alpha$ est un paramètre réel.

1) Pour quelles valeurs de $\alpha$, l'integral $I$ est-elle convergente ?

2) On définit la fonction $\Gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par :

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} \exp(-t) dt$$

— a) Pour quelles valeurs de $x$, $\Gamma(x)$ existe ?
— b) Exprimer $\Gamma(x+1)$ en fonction de $\Gamma(x)$, puis en déduire $\Gamma(x+n) \quad$ pour $\; n \in \mathbb{N}$.

3) Calculer $\Gamma(1)$ et $\Gamma(n+1)$

4) On pose :
$g(x) = \ln(\Gamma(x))$.
— a) Montrer que $g(x+1) = g(x) + \ln(x)$
— b) Montrer que pour tout $n \geq 2$, on a :

$$g(x+n) - g(x) = g(n) + \ln(x) + \sum_{k=1}^{n-1} [\ln(x+k) - \ln k]$$

5 )
— a) En utilisant le changement de variable $t = u^2$, montrer qu'on a :

$$\Gamma(x) = 2 \int_0^{+\infty} u^{2x-1} \exp(-u^2) du$$

— b) On suppose que :

$$\int_0^{+\infty} \exp(-x^2) dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \; .$$

Calculer alors :

$$\Gamma(\frac{1}{2})$$

— c) Montrer que :

$$\Gamma(n + \frac{1}{2}) = (n - \frac{1}{2})(n - \frac{3}{2}) \; \dots \; (\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})$$

— d) En déduire la valeur de $\Gamma(n + \frac{1}{2})$.