TD2 - Intégrales à paramètres

Applications du cours

Exercice 1 1. En utilisant le théorème de convergence dominée, calculer $\lim_{x\to+\infty}\int_0^{\pi}\cos(t)\exp\left(-\frac{t^2}{x}\right)dt$.
On pourra poser $I=[0;\pi]$ et $A=[1;+\infty)$.

2. Calculer $\lim_{x\to+\infty}\int_0^1 \frac{x}{(1+x^2t)^{\frac{1}{2}}}dx$. On pourra poser $I=]0;1]$ et $A=[0;+\infty[$.

Exercice 2
Déterminer $\lim_{n\to+\infty} I(n)=\int_0^1 \frac{1+nx}{(1+x)^n}dx$.

Exercice 3
Soit $f_n(x)=\frac{1}{n}\mathbf{1}_{[n;2n]}(x)$. Montrer que $(f_n)_n$ converge localement uniformément sur $\mathbb{R}_+$ vers une fonction f que l'on déterminera, puis calculer

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty} f_n(x)dx.$$

Commenter en comparant avec le thórème de convergence dominée.

Exercice 4
Montrer que la fonction F est continue sur $A=[-\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{6}]$, puis déterminer sa valeur en 0

$$F(x)=\int_0^1 \frac{dt}{1+t^2\cos(xt)}.$$

Exercice 5
Soit la fonction

$$F(x)=\int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t}dt.$$

Après avoir déterminer l'ensemble de définition de F, montrer que F est continue sur son ensemble de définition.

Exercice 6
Montrer que la fonction F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, avec

$$F(x)=\int_0^{+\infty}\frac{t}{1+t^4}\ln(t^2+x^2)dt.$$

La fonction F admet-elle un minimum, et si oui, en quel point?

Exercice 7
Soit la fonction F définie par, pour $x>0$,

$$F(x)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos(t)}{t+x}dt.$$

Montrer que F est $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}_+^\star)$.
Question BONUS : Déterminer une relation entre F'' et F. (On ne demande pas de résoudre cette EDO, même si c'est techniquement faisable)

Exercices classiques

Exercice 8
Montrer les deux égalités

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty}\frac{dt}{t^n+e^t}dt = 1-\frac{1}{e}$$
$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty}\left(1-\frac{t}{n}\right)^n \mathbf{1}_{[0;n]}(t)\ln(t)dt = \int_0^{+\infty} e^{-t}\ln(t)dt.$$

Exercice 9
Montrer que la fonction suivante est continue sur $[0;1[$

$$F(x)=\int_0^1 \frac{e^t}{\sin(t)^x}dt.$$

Exercice 10
On souhaite montrer la valeur de l'intégrale de Dirichlet

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin(t)}{t}dt=\frac{\pi}{2}.$$

On définit la fonction

$$F(x)=\int_0^{+\infty}\frac{\sin(tx)}{t(1+t^2)}dt.$$

1. Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+^\star)$.
2. En utilisant la même méthode, peut-on montrer que $F\in\mathcal{C}^2(\mathbb{R}_+^\star)$?
3. Appliquer une intégration par parties sur l'intégrale définissant F', puis montrer que $F'\in\mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+^\star)$.
4. Retrouver le résultat sur $\mathbb{R}_+^\star$:

$$F''(x)=-\int_0^{+\infty}\frac{t}{1+t^2}\sin(tx)dt.$$

5. Question BONUS : Grâce à une équation différentielle d'ordre 2 sur F, déterminer une expression explicite de F et déterminer la valeur de l'intégrale de Dirichlet.

Exercice 11
Montrer les égalités suivantes

$$\int_0^1\frac{dx}{x^x}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^n}\quad \text{et} \quad \int_0^1\frac{\ln(x)}{x-1}dx=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}.$$

Exercices supplémentaires

Exercice 12 (* Intégrale de Dirichlet)
On considère la fonction, pour $x\in\mathbb{R}_+$,

$$F(x)=\int_0^{+\infty}\frac{\sin(t)}{t}e^{-tx}dt.$$

1. Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+^\star)$.

2. Montrer que
$$\int_1^{+\infty} \frac{e^{(i-x)t}}{t}dt = -\frac{e^{i-x}}{i-x} + \int_1^{+\infty} \frac{e^{(i-x)t}}{(i-x)}\frac{1}{t^2}dt.$$

3. Montrer que F est continue sur $\mathbb{R}_+$ en s'aidant de la décomposition $F(x) = F_1(x) + F_2(x)$ avec
$$F_1(x) = \int_0^1 \frac{\sin(t)}{t}e^{-xt}dt \quad \text{et} \quad F_2(x) = \int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}e^{-xt}dt.$$

   Que vaut $F(0)$?

4. Grâce à un calcul explicite de F', déterminer une expression de F puis la valeur de l'intégrale de Dirichlet $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}dt$.

Exercice 13 (**)
On considère la fonction
$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\frac{t}{x}}}{1+t}dt.$$

Donner l'intervalle de définition de F. Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$, et après avoir déterminé une équation d'ordre 1 satisfaite par F, déterminer une expression de F.

Exercice 14 (*** inversion somme-intégrale)
Montrer dans un premier temps que
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-x\cos(t)}\cos(x\sin(t))dt = \frac{\pi}{2} - \int_0^x \frac{\sin(t)}{t}dt$$

puis retrouver la valeur de l'intégrale de Dirichlet.