Département de Mathématiques
Préing 2 - Intégration et Probabilité
2021 - 2022

TD 2 - Intégrales Multiples

Exercice 0. Soit D le domaine

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ x+y \leq 1\right\}.$$

Calculer $\displaystyle\int\int_D f(x,y)dxdy$ dans les cas suivants :

$$f(x,y) \;=\; x^2+y^2 \quad \text{et} \quad f(x,y) \;=\; xy\cdot(x+y).$$

Exercice 00. Calculer l'intégrale double

$$\int\int_D \frac{1}{(x+y)^3}dxdy$$

avec

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2:\ 1 < x < 3,\ y > 2,\ x+y < 5\right\}.$$

Exercice 1. Soit $a > 0$ et soit K l'ensemble limité par les côtés du triangle OAB avec $A = (2a, a)$ et $B = (3a, 3a)$. Calculer :

$$\int\int_K x\cdot y\ dxdy.$$

Exercice 2. Soit $0 < a < b$. Posons

$$K = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2:\ a \leq x+y \leq b \quad \text{et} \quad \frac{1}{3} \leq \frac{y}{x} \leq 3\right\}$$

Calculer :

$$\int\int_K \frac{\exp(-(x+y))}{\sqrt{xy}}\ dxdy.$$

On pourra effectuer le changement de variables :

$$x' = x+y \qquad \text{et} \qquad y' = \frac{y}{x+y}.$$

Exercice 3. Soit D le domaine délimité par les deux courbes d'équations :

$$y^2 = 4x+4 \quad \text{et} \quad y^2 = -4x+4.$$

a) Représenter graphiquement D.
b) Calculer l'aire du domaine D.

Exercice 4. On se propose dans cet exercice de calculer

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx.$$

1.) Justifier la convergence de cette intégrale.

2.) Soit $a > 0$. On note K_a le carré de centre 0 de côté $2a$ et C_a le disque de centre O et de rayon a. On définit une fonction f sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x,y) = e^{-x^2-y^2}.$$

Justifier que

$$\int_{C_a} e^{-x^2-y^2}dxdy \ \leq \ \int_{K_a} e^{-x^2-y^2}dxdy \leq \ \int_{C_{a\sqrt{2}}} e^{-x^2-y^2}dxdy$$

3.) En effectuant un changement de variables en coordonnées polaires, calculer

$$\int_{C_a} e^{-x^2-y^2}dxdy.$$

4.) Déduire des questions précédentes la valeur de

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx.$$

Exercice 5. Soit

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 - 2x \leq 0\}$$

1. Montrer que D est un disque.
2. Calculer

$$\int\int_D \sqrt{x^2+y^2}dxdy.$$

Exercice 6. Calculer $\int\int_\Delta f(x,y)dxdy$ dans les cas suivants.

a. $f(x,y) = \frac{(x+y)^2}{x^2+y^2+1}$ et

$$\Delta = \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2+y^2 \leq 1\Big\}.$$

b. $f(x,y) = xy^2$ et Δ le disque délimité par le cercle d'équation :

$$x^2+y^2-2Rx = 0, \quad R > 0.$$

c. $f(x,y) = x^2+y^2$ et

$$\Delta = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1\right\}.$$

Exercice 7.

a. Calculer

$$\int_\Delta xy \ dxdy$$

où Δ est la partie du plan limitée par :

$$y = x^2 \quad \text{ et } \quad x = y^2.$$

b. Calculer l'aire de la surface limitée par l'ellipse :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad \text{ avec } \quad a > 1, \ b > 1.$$

c. Calculer le volume limité par l'ellipsoide défini par :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \qquad \text{avec} \qquad a > 1,\ b > 1,\ c > 1.$$

d. Calculer le volume du secteur sphérique, limité par la sphère de centre O et de rayon R et le demi-cône supérieur de sommet O et d'angle 2α.

Exercice 8. Calculer

$$\int_\Omega f(x,y,z)\ dxdydz$$

dans le cas suivants :

1. $f(x,y,z) = \frac{1}{(x+y+z+1)^3}$ et

$$\Omega = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0,\ x+y+z \leq 1\right\}.$$

2. $f(x,y,z) = \frac{1}{x^2+y^2+z^2}$ et

$$\Omega = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ x^2+y^2+z^2 \leq R^2\right\}.$$

3. $f(x,y,z) = x^2 y$ et

$$\Omega = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ 0 \leq y \leq 1 - x^2,\ |x+y+z| \leq 1\right\}.$$

Exercice 9. Calculer

$$\int\int\int_D xyz\ dxdydz.$$

où D est le domaine limité par les plans d'équation

$$x = 0 \quad ; \quad y = 0 \quad ; \quad z = 0$$

et la sphère de centre O et de rayon 1, dont les points ont des coordonnées positives.

Exercice 10. Calculer le volume limité par la sphère de centre O et de rayon 1 et le cylindre d'équation

$$x^2 + y^2 - x = 0.$$