TD1 - Intégrales généralisées

Applications du cours

Exercice 1
Déterminer, en utilisant le critère de Riemann, la nature des intégrales suivantes.

$$I_1 = \int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{1+t^2} dt; \quad I_2 = \int_0^1 \frac{\ln(t)^3}{\sqrt{t}} dt; \quad I_3 = \int_0^{+\infty} \exp(-x)\ln(x) dx; \quad I_4 = \int_0^1 \exp\left(\ln^2(x)\right) dx$$

Exercice 2
Déterminer, en utilisant les équivalents de fonctions, la nature des intégrales suivantes.

$$J_1 = \int_0^1 \frac{1-\sqrt{1-t}}{t} dt; \quad J_2 = \int_0^1 \frac{\tan(x)}{\arcsin(x) - x} dx.$$

Exercice 3
Soient $\alpha < \beta$ deux réels. Étudier la nature de l'intégrale suivante :

$$I = \int_\alpha^\beta \frac{dt}{\sqrt{(t-\alpha)(\beta-t)}}.$$

Déterminer ensuite la valeur de cette intégrale. On pourra utiliser le changement de variable $u = \frac{t-\alpha}{\beta-t}$.

Exercice 4
Après avoir montré que les intégrales suivantes convergent, déterminer leur valeur par intégration par parties.

$$I_1 = \int_0^{+\infty} t^2 e^{-t} dt; \quad I_2 = \int_1^{+\infty} \arctan(\frac{1}{t})\frac{1}{t^2} dt.$$

Exercice 5
Les fonctions suivantes sont-elles intégrables? On pourra s'aider d'une représentation graphique.

$$f_1(x) = \frac{\cos(x^2)}{x^2+1} \text{ sur }]0;+\infty[; \quad f_2(x) = x^{-\frac{1}{2}}\sin(x) \text{ sur } [1;+\infty[.$$

Les intégrales suivantes sont-elles convergentes?

$$I_1 = \int_0^{+\infty} \frac{\cos(x^2)}{x^2+1} dx; \quad I_2 = \int_1^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x^{\frac{1}{2}}} dx.$$

Exercices classiques

Exercice 6
Déterminer la nature des intégrales suivantes.

$$I_1 = \int_0^1 \frac{1}{\ln(x)} dx; \quad I_2 = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha + x^\beta} \quad \text{avec} \quad \alpha > \beta;$$

$$I_3 = \int_0^{+\infty} x^\alpha \left(1 - \exp(-\frac{1}{\sqrt{x}})\right) dx \text{ avec } \alpha \in \mathbb{R}; \quad I_4 = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)^\alpha} \text{ avec } \alpha \in \mathbb{R},$$

$$I_5 = \int_0^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x^2-1} dx.$$

Exercice 7 (Intégrales de Bertrand)
Étudier la convergence de l'intégrale de Bertrand en fonction des paramètres réels α et β:

$$I = \int_2^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha (\ln(t))^\beta}.$$

Exercice 8

1. Montrer que, pour tout réel $k < 0$, l'intégrale suivante est absolument convergente

$$I = \int_1^{+\infty} t^{k-1} \cos(t) dt.$$

2. En déduire que l'intégrale suivante est définie pour tout réel $k < 0$:

$$J = \int_1^{+\infty} t^k \sin(t) dt.$$

3. Utiliser le résultat précédent pour étudier la nature de l'intégrale

$$K = \int_1^{+\infty} \sqrt{t} \sin(t^2) dt.$$

Exercice 9
On définit la fonction Gamma par

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt.$$

1. Déterminer le domaine de définition de Γ (l'ensemble des valeurs x pour lesquelles l'intégrale est convergente).
2. Exprimer $\Gamma(x+1)$ en fonction de $\Gamma(x)$. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\Gamma(x+n)$ en fonction de $\Gamma(x)$.
3. Calculer $\Gamma(1)$ et $\Gamma(n)$.
4. On pose $g(x) = \ln(\Gamma(x))$.
   (a) Montrer que $g(x+1) = g(x) + \ln(x)$.
   (b) Montrer que pour tout $n \geq 2$, on a :

$$g(x+n) - g(x) = g(n) + \ln(x) + \sum_{k=1}^{n-1} (\ln(x+k) - \ln(k)).$$

5. (a) En utilisant le changement de variable $t = u^2$, montrer que

$$\Gamma(x) = 2 \int_0^{+\infty} u^{2x-1} e^{-u^2} du.$$

   (b) On suppose que

$$\int_0^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

   Calculer ensuite $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$.
   (c) Montrer que

$$\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \left(n - \frac{1}{2}\right)\left(n - \frac{3}{2}\right) \cdots \left(\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right).$$

   (d) En déduire la valeur de $\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right)$.

Exercices supplémentaires

Exercice 10 (*)
La fonction suivante est-elle intégrable? On pourra s'aider d'une représentation graphique.

$$f(x) = \frac{(-1)^{\lfloor x \rfloor}}{\lfloor x \rfloor} \text{ sur }]1; +\infty[.$$

avec $\lfloor x \rfloor$ correspondant à la partie entière inférieure. L'intégrale suivante est-elle convergente?

$$I = \int_1^{+\infty} \frac{(-1)^{\lfloor x \rfloor}}{\lfloor x \rfloor} dx.$$

Exercice 11 (*)
Déterminer la nature de

$$A = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1 + \left(x - \frac{1}{x}\right)^2}.$$

Que devient A par le changement de variable $x = \frac{1}{t}$? En déduire un calcul simple de A. Indication : retrouver la dérivée de $f(x) = x - \frac{1}{x}$.

Exercice 12 (** Intégrale de Fresnel)
Étudier la nature de l'intégrale suivante, avec $n \in \mathbb{R}_+^\star$

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x^n} dx.$$

Appliquer ensuite aux intégrales de Fresnel :

$$I_1 = \int_0^{+\infty} \sin(x^2) dx; \quad I_2 = \int_0^{+\infty} \cos(x^2) dx; \quad I_3 = \int_0^{+\infty} \sin(x^\alpha) dx \quad \text{avec } \alpha \in \mathbb{R}.$$

Exercice 13 (**)
On pose

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(\sin(x)\right) dx.$$

1. Montrer que l'intégrale I est convergente.
2. Montrer que

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos(x)) dx \quad \text{et que} \quad I = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(\frac{1}{2} \sin(2x)\right) dx.$$

3. Montrer que

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(2x)) dx.$$

4. Déduire des deux questions précédentes la valeur de I.

Exercice 14 (***)
Déterminer la nature de l'intégrale puis calculer la valeur de

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{(x^2 - x^3)^{\frac{1}{3}}}.$$