Lois de variables aléatoires réelles discrètes usuelles

Ludovic Cesbron
Frédéric Valet

2024-2025

1 Loi uniforme

De façon analogue à la probabilité uniforme, la loi uniforme est celle des v.a.r. discrète qui prennent leur différentes valeurs de manière équiprobable, pour que ce soit possible il est nécessaire que $X(\Omega)$ soit fini.

Définition 1.1
Soient $(\Omega, \mathbb{P})$ *un espace de probabilité et* X *une v.a.r. telle que* $X(\Omega) = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. *On dit que* X *suit une* ***loi uniforme*** *sur* $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ *si*

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \, \mathbb{P}(X = a_i) = \frac{1}{n}.$$

On note $X \hookrightarrow \mathcal{U}_{\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}}$.

Exemple 1.1
Si X *est la v.a.r. qui donne le résultat du lancer d'un dé équilibré alors on a* $X \hookrightarrow \mathcal{U}_{[\![1,6]\!]}$.

Proposition 1.1
Soient $n \in \mathbb{N}^*$ *et* X *une v.a.r. discrète telle que* $X \hookrightarrow \mathcal{U}_{[\![1,n]\!]}$, *alors*

- $\mathbb{E}(X) = \dfrac{n+1}{2}$, *c'est la moyenne (non-pondérée) des valeurs de* X.
- $\mathbb{V}(X) = \dfrac{n^2 - 1}{12}$.

Démonstration :

- *Pour l'espérance on a*

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{i=1}^{n} i \mathbb{P}(X = i) = \sum_{i=1}^{n} i \frac{1}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} i.$$

De plus, on reconnaît la somme d'une suite arithmétique de raison 1 *qui commence à* $i = 1$ *donc* $\sum_{i=1}^{n} i = n\left(\frac{n+1}{2}\right)$*. On obtient*

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{n} n \left(\frac{n+1}{2}\right) = \frac{n+1}{2}.$$

- *Pour la variance, on calcule d'abord*

$$\mathbb{E}(X^2) = \sum_{i=1}^{n} i^2 \mathbb{P}(X = i) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} i^2.$$

La somme des carrés (laissée en exercice) vaut $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ *donc on a* $\mathbb{E}(X^2) = \frac{(n+1)(2n+1)}{6}$*, on en déduit*

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}(X) &= \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 \\
&= \frac{(n+1)(2n+1)}{6} - \left(\frac{n+1}{2}\right)^2 \\
&= \frac{2(n+1)(2n+1) - 3(n+1)^2}{12} = \frac{n^2-1}{12}.
\end{aligned}$$

2 Loi de Bernouilli de paramètre $p \in [0, 1]$

On s'intéresse à une expérience qui n'a que deux issues possibles (par exemple un pile ou face ou un tirage unique dans une urne avec seulement 2 types de boules). On appelle la première issue "le succès", et la seconde "l'échec". Le paramètre p de la loi de Bernouilli désigne la probabilité du succès. Par complémentarité la probabilité de l'échec est donc $1 - p$.
On introduit la variable aléatoire $X : \Omega \to \{0, 1\}$ définie par : $X = 1$ en cas de succès, $X = 0$ en cas d'échec.

Définition 2.1
Soient $(\Omega, \mathbb{P})$ *un espace de probabilité,* $p \in [0, 1]$ *et* X *une v.a.r. discrète telle que* $X(\Omega) = \{0, 1\}$.
On dit que X *suit une* ***loi de Bernouilli de paramètre p****, noté* $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$*, si*

$$\mathbb{P}(X = 1) = p \quad \textit{et} \quad \mathbb{P}(X = 0) = 1 - p.$$

Proposition 2.1
Soient $p \in [0, 1]$ *et* $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$*. Alors*

- $\mathbb{E}(X) = p$,
- $\mathbb{V}(X) = p(1 - p)$.

<u>Démonstration :</u>
Les résultats s'obtiennent par calculs directs:

- $\mathbb{E}(X) = 0 \times (1-p) + 1 \times p = p$.
- $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = 0^2 \times (1-p) + 1^2 \times p - (p)^2 = p - p^2 = p(1-p)$.

3 Loi Binomiale de paramètre (n, p)

Les lois binomiales sont celles associées à la répétition, de manière indépendante, d'une expérience suivant une loi de Bernouilli. Par exemple, on peut faire une série de pile ou face, ou encore faire des tirages avec remise dans une urne contenant 2 types de boules. Les paramètres d'une loi Binomiale sont donc : n le nombre de répétitions, et p le paramètre de la loi de Bernouilli que l'on répète.
On introduit une v.a.r. discrète X qui compte le nombre de succès parmi les n itérations. On a donc $X(\Omega) = [\![0, n]\!]$.

Définition 3.1
Soient $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace de probabilité, $p \in [0,1]$, $n \in \mathbb{N}$ et X une v.a.r. discrète telle que $X(\Omega) = [\![0, n]\!]$.
*On dit que X suit une **loi binomiale de paramètres (n, p)**, noté $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$, si*

$$\forall k \in [\![0, n]\!], \quad \mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

Cette formule peut s'interpréter de la façon suivante : pour avoir exactement k succès parmi les n lancers il faut avoir k réussites, d'où le p^k, et n'avoir que des échecs par ailleurs, donc $n-k$ échecs, d'où le $(1-p)^{n-k}$. L'ordre des lancers n'a pas d'importance : on peut répartir ces succès comme on le souhaite parmi les n lancers et il y a exactement $\binom{n}{k}$ façons de répartir les k succès parmi les n lancers.

Remarque 3.1
Une loi de Bernouilli de paramètre p est en fait une loi Binomiale de paramètre $(1, p)$: $\mathcal{B}(p) = \mathcal{B}(1, p)$, d'où l'utilisation de la même lettre $\mathcal{B}$.

Remarque 3.2
La formule du binôme de Newton nous assure que l'on a bien défini une loi de probabilité puisque

$$\sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = (p + 1 - p)^n = 1.$$

<u>*Exemple*</u> 3.1

1. *On lance une pièce équilibrée 15 fois. Quelle est la probabilité de faire exactement 4 fois pile ?*

2. *Une urne contient 12 boules blanches et 8 boules noires. On tire 10 fois, avec remise, une boule dans l'urne. Quelle est la probabilité de tirer 7 fois une boule blanche ?*

Proposition 3.1
Soient $p \in [0,1]$, $n \in \mathbb{N}$ et $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$. Alors

- $\mathbb{E}(X) = np$,
- $\mathbb{V}(X) = np(1-p)$

Démonstration :

- *Calcul de l'espérance :*

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= \sum_{k=0}^{n} k\mathbb{P}(X=k) = \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}\\ &= \sum_{k=1}^{n} n\binom{n-1}{k-1}p^k(1-p)^{n-k} = n\sum_{i=0}^{n-1}\binom{n-1}{i}p^{i+1}(1-p)^{n-i-1}\\ &= np\sum_{i=0}^{n-1}\binom{n-1}{i}p^i(1-p)^{(n-1)-i} = np\end{aligned}$$

On a utilisé ci-dessus la relation suivante sur les coefficients binomiaux

$$\begin{aligned}k\binom{n}{k} &= k\frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{(k-1)!(n-1-k+1)!}\\ &= n\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-1-(k-1))!} = n\binom{n-1}{k-1}\end{aligned}$$

ainsi que le changement d'indice $i = k-1$ et on a reconnu un binôme de Newton (cf Remarque 3.2) au rang $n-1$ à la dernière étape.

- *Calcul de $\mathbb{E}(X^2)$: en décomposant $k^2 = (k-1+1)k = (k-1)k + k$ on a*

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X^2) &= \sum_{k=0}^{n} k^2\mathbb{P}(X=k)\\ &= \sum_{k=2}^{n}(k-1)k\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k} + \sum_{k=1}^{n} k\mathbb{P}(X=k).\end{aligned}$$

On reconnaît $\mathbb{E}(X) = np$ dans le second terme, pour le premier on utilise *deux fois la relation précédente sur les coefficients binomiaux :*

$$\begin{aligned}
\sum_{k=2}^{n}(k-1)n\binom{n-1}{k-1}p^k(1-p)^{n-k} &= n\sum_{k=2}^{n}(n-1)\binom{n-2}{k-2}p^k(1-p)^{n-k} \\
&= n(n-1)\sum_{j=0}^{n-2}\binom{n-2}{j}p^{j+2}(1-p)^{n-2-j} \\
&= n(n-1)p^2\sum_{j=0}^{n-2}\binom{n-2}{j}p^{j}(1-p)^{n-2-j} \\
&= n^2p^2 - np^2
\end{aligned}$$

en reconnaissant un binôme de Newton au rang $n-2$. On a donc

$$\mathbb{E}(X^2) =^2 p^2 - np^2 + np$$

et on en déduit que

$$\mathbb{V}(X) = n^2p^2 - np^2 + np - (np)^2 = np(-p+1) = np(1-p).$$

4 Loi Géométrique de paramètre $p \in]0,1]$

Comme les loi Binomiales, les lois Géométriques sont aussi associées à des répétitions (indépendantes) d'une expérience de Bernoulli. La différence est qu'une v.a.r. de loi Géométrique compte le rang du premier succès. Par exemple, si on reprend l'expérience du pile ou face où on nomme "succès" le pile et "échec" le face. Une v.a.r. X de loi géométrique compte combien il a fallu d'essais pour obtenir le premier pile. Le paramètre p de la loi Géométrique est celui de l'expérience de Bernoulli sous-jacente.

Définition 4.1
Soient $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace de probabilité, $p \in]0,1]$ et X une v.a.r. discrète telle que $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$.
*On dit que X suit une **loi géométrique de paramètre p**, noté $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$, si*

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}(X = k) = p(1-p)^{k-1}.$$

Cette formule s'interprète de manière similaire à celle de la loi Binomiale. Pour que le premier succès ait lieu à la $k$ième répétition de l'expérience (événement "$X = k$") il faut avoir enchainé $k-1$ échecs, d'où le $(1-p)^{k-1}$, et un succès, d'où le p. On remarque que l'ordre des résultats importe pour la loi géométrique, pour que $X = k$ il faut faire d'abord $k-1$ échecs puis un succès, il n'y a donc pas de coefficient binomial dans la formule de la loi géométrique.

Remarque 4.1
On exclut le cas $p = 0$ de la définition de la loi géométrique car dans ce cas on aurait $\mathbb{P}(X = k) = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et la propriété 2 de la définition d'une

probabilité ne serait donc pas satisfaite.
En revanche, pour tout $p \in]0,1]$ et $n \in \mathbb{N}^*$, en reconnaissant la somme d'une suite géométrique de raison $(1-p)$ on a

$$\sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(X=k) = \sum_{k=1}^{n} p(1-p)^{k-1} = p\frac{1-(1-p)^n}{1-(1-p)} = 1-(1-p)^n$$

et puisque $1-p \in [0,1[$ on retrouve bien $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X=k) = 1$.

<u>*Exemple*</u> 4.1

1. *On lance une pièce équilibrée. Quelle est la probabilité qu'on obtienne pile pour la première fois lors du 5ème lancer ?*
2. *Une urne contient 10 boules blanches et 3 boules noires. On effectue des tirages successifs avec remise. Quelle est la probabilité de tirer une boule noire pour la première fois lors du 8ème tirage ?*

Proposition 4.1
Soient $p \in]0,1]$ et $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$. Alors

- $\mathbb{E}(X) = \dfrac{1}{p}$,
- $\mathbb{V}(X) = \dfrac{1-p}{p^2}$

<u>*Démonstration :*</u>

- *On commence par remarquer qu'en dérivant la série entière géométrique $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$ pour tout $x \in]0,1[$ (on rappelle qu'une série entière CVN sur son disque ouvert de convergence donc on peut intervertir somme et dérivée, ici le rayon de convergence est $R=1$) on obtient*

  $$\sum_{k=1}^{\infty} kx^{k-1} = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

  Calcul de l'espérance :

  $$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=1}^{+\infty} k\mathbb{P}(X=k) = \sum_{k=1}^{+\infty} kp(1-p)^{k-1} = p\frac{1}{(1-(1-p))^2} = \frac{1}{p}.$$

- *Pour la variance, on commence par calculer $\mathbb{E}(X^2)$ et, en dérivant une deuxième fois la série entière géométrique $\displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)x^{k-2} = \frac{2}{(1-x)^3}$*

(on rappelle qu'une série entière à le même rayon de convergence que toutes ses séries dérivées). Ainsi, en décomposant $k^2 = k(k-1)+k$ on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X^2) &= \sum_{k=1}^{+\infty} k^2 \mathbb{P}(X=k) \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} k(k-1)p(1-p)^{k-1} + \sum_{k=1}^{+\infty} kp(1-p)^{k-1} \\
&= p(1-p)\sum_{k=1}^{+\infty} k(k-1)(1-p)^{k-2} + \mathbb{E}(X) \\
&= p(1-p)\frac{2}{(1-(1-p))^3} + \frac{1}{p} \\
&= \frac{2(1-p)}{p^2} + \frac{1}{p}.
\end{aligned}$$

On en déduit

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = \frac{2(1-p)}{p^2} + \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2} = \frac{2-2p+p-1}{p^2} = \frac{1-p}{p^2}.$$

5 Loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$

Les lois de Poisson interviennent lorsque l'on souhaite compter les occurrences d'un "événement rare".
Par exemple, si on souhaite compter le nombre de clients qui entrent dans un magasin entre 16h et 17h, sachant qu'en moyenne un nouveau client arrive toutes les 10 minutes, la variable aléatoire X qui compte le nombre de clients suivra une loi de Poisson de paramètre $1/6$ (= 1heure/10minutes).
Le paramètre de la loi de Poisson représente la fréquence avec laquelle l'événement a lieu en moyenne sur l'intervalle de temps considéré.

Définition 5.1
Soient $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace de probabilité, $\lambda > 0$ et X une v.a.r. discrète telle que $X(\Omega) = \mathbb{N}$.
*On dit que X suit une **loi de Poisson de paramètre $\boldsymbol{\lambda}$**, noté $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$, si*

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}(X=k) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}.$$

Remarque 5.1
On rappelle que par définition $e^x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}$. On retrouve donc bien

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X=k) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda}e^{\lambda} = 1.$$

Remarque 5.2
La formule de la loi de Poisson découle de son lien avec la loi Binomiale. En effet, dans l'exemple des clients qui entrent dans un magasin, une autre modélisation possible aurait été la suivante : on considère que chaque minute il y a une probabilité p qu'un client entre dans le magasin. Compter le nombre de clients revient donc à effectuer donc 60 *fois une expérience de Bernouilli de paramètre p, la v.a.r. associée suit donc une loi Binomiale de paramètre* $(60, p)$*.*
On pourrait aussi considéré que toutes les 10 *secondes il y a une probabilité p' qu'un client entre, et la v.a.r. qui compte le nombre de clients suivra donc une loi binomiale* $\mathcal{B}(360, p')$*.*
On peut voir la loi de Poisson comme la limite de cette modélisation binomiale quand on fait tendre le pas de temps vers 0*. Naturellement, plus le pas de temps est court plus la probabilité p qu'un client entre est faible (en d'autres termes, p dépend de n : le nombre de pas de temps nécessaire pour recouvrir l'intervalle d'1 heure).*

Plus précisément, si on fixe $\lambda > 0$ et qu'on regarde la limite quand $N \to +\infty$ d'une loi binomiale $\mathcal{B}\left(N, \frac{\lambda}{N}\right)$ on obtient (dans un certain sens) une loi de Poisson.
Cela se vérifie par le calcul : Si $X \hookrightarrow \mathcal{B}\left(N, \dfrac{\lambda}{N}\right)$ alors pour tout $k \in [\![0, N]\!]$

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X = k) &= \binom{N}{k} \left(\frac{\lambda}{N}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{N}\right)^{N-k} \\
&= \frac{N!}{k!(N-k)!} \lambda^k \frac{1}{N^k} \left(1 - \frac{\lambda}{N}\right)^N \left(1 - \frac{\lambda}{N}\right)^{-k} \\
&= \frac{\lambda^k}{k!} \left(1 - \frac{\lambda}{N}\right)^N \left[\frac{N!}{N^k(N-k)!} \left(1 - \frac{k}{N}\right)^{-k}\right].
\end{aligned}$$

Pour le second terme, sachant que $\ln(1+x) \sim x$ quand $x \to 0$ on a

$$\lim_{N \to +\infty} \left(1 - \frac{\lambda}{N}\right)^N = \lim_{N \to +\infty} e^{N \ln\left(1 - \frac{\lambda}{N}\right)} = \lim_{N \to +\infty} e^{N\left(-\frac{\lambda}{N}\right)} = e^{-\lambda}.$$

D'autre part avec l'équivalence $N - k \sim N$ quand $N \to +\infty$ pour tout k fixé :

$$\begin{aligned}
\lim_{N \to +\infty} \frac{N!}{N^k(N-k)!} \left(1 - \frac{k}{N}\right)^{-k} &= \lim_{N \to +\infty} \frac{N(N-1)\ldots(N-k+1)}{N^k} \\
&= \lim_{N \to +\infty} \frac{N^k}{N^k} = 1
\end{aligned}$$

donc on retrouve bien l'expression de la loi de Poisson

$$\lim_{N \to +\infty} \mathbb{P}(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}.$$

Exercice 5.1

1. *Une entreprise constate en moyenne 3 accidents du travail par an. L'effectif total étant relativement élevé on utilise une loi de Poisson pour modéliser le nombre d'accidents du travail. Quelle est la probabilité que 5 accidents du travail aient lieu sur la même année ?*

2. *Dans un parking de centre commercial, il arrive en moyenne 120 voitures par heure lors des jours de soldes. Calculer la probabilité de voir 4 voitures arriver en 1 minute.*

Remarque 5.3
Dans le premier exercice ci-dessus il est précisé que l'entreprise a un grand nombre d'employés. C'est en effet là que se joue le choix de modélisation. Si l'entreprise n'avait que 20 employés et 3 accidents du travail par an, il serait raisonnable de modéliser la situation par : chaque employé a une probabilité 3/20 *d'avoir un accident dans l'année. On utiliserait donc une loi Binomiale pour répondre à la question. En revanche, quand le nombre d'employés est très grand il est plus pertinent d'utiliser une loi de Poisson plutôt qu'une loi Binomiale dont le paramètre serait très proche de* 0*. C'est dans ce sens qu'on parle "d'événement rare" quand on introduit la loi de Poisson.*

Proposition 5.1
Soit $\lambda > 0$ et $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$. Alors

- $\mathbb{E}(X) = \lambda$,
- $\mathbb{V}(X) = \lambda$.

Démonstration :

- *Calcul de l'espérance :*

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} k\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} = e^{-\lambda}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\lambda^k}{(k-1)!} = e^{-\lambda}\sum_{j=0}^{+\infty}\lambda\frac{\lambda^j}{j!} = e^{-\lambda}\lambda e^{\lambda} = \lambda.$$

- *Cette fois encore, pour la variance on commence par calculer $\mathbb{E}(X^2)$ en écrivant $k^2 = k(k-1)+k$:*

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X^2) = \sum_{k=0}^{+\infty} k^2\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} &= \sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} + \sum_{k=0}^{+\infty} k\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} \\ &= e^{-\lambda}\lambda^2\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!} + \mathbb{E}(X) = e^{-\lambda}\lambda^2 e^{\lambda} + \lambda \\ &= \lambda^2 + \lambda.\end{aligned}$$

On en déduit

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda.$$