Préing 2	
Devoir Surveillé 3	
Matière : **Intégrations et probabilités** ***Le barème est donné à titre indicatif.***	*Date :* **mardi 4 juin 2024** *Durée :* **2h** *Nombre de pages :* **2**

Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction et de la précision des justifications. L'usage de tout appareil électronique est interdit. Aucun document n'est autorisé. Le sujet comporte 4 exercices. L'ordre dans lequel ceux-ci sont traités n'est pas imposé.

♣ ♣ ♣

Exercice 1 : Soit Ω un domain borné de $\mathbb{R}^2$ défini par

$$\Omega = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / \quad \frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{5\pi}{4} \quad , \quad \cos(x) \leq y \leq \sin(x)\right\},$$

et $\partial\Omega$ le bord de Ω.

1. **Partie I** : Soit $\omega = y\sin(x)\ \mathrm{d}x + (x + y)\ \mathrm{d}y$ une forme différentielle sur Ω.
   (a) Est-ce que ω est fermée, exacte sur Ω ? justifier
   (b) Représenter graphiquement l'ensemble $\partial\Omega$.
   (c) Donner une représentation paramétrique de $\partial\Omega$.
   (d) Calculer $I = \displaystyle\int_{\partial\Omega} \omega$
      i. Par calcul direct.
      ii. Par le théorème de Green - Riemann
2. **Partie II** : En utilisant le théorème de Green - Riemann, calculer l'intégrale double suivante :

$$J = \iint_{\Omega} (1 - 2y)\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y$$

Exercice 2 : Un fabricant de matériel de télémétrie achète des microprocesseurs de trois fournisseurs. Ces derniers respectent les mêmes normes de produit. Néanmoins, pendant des années, le fabricant a vérifié chaque lot reçu, ce qui lui a permis de réunir les données ci-dessous.

fournisseur	part fournie	part défectueuse
1	0,15	0,02
2	0,8	0,01
3	0.05	0,03

Le fabricant a cessé toute vérification en raison des coûts. On suppose que les parts défectueuses et les parts fournies demeurent inchangées. Le directeur de la production recoit 2000 microprocesseurs et il choisit un microprocesseur au hasard.

1. Quelle est la probabilité que le microprocesseur soit défectueux ? Notons cet événement D, et notons B_i l'événement ≪ le microprocesseur vient du fournisseur i ≫. On utilise un schéma en arbre pour illustrer la situation.
2. Calculer la quantité des microprocesseurs reçus non-défectueux.
3. Le directeur envoie le microprocesseur choisi au hasard au laboratoire d'essais, qui révèle que l'unité est effectivement défectueuse. Quelle est la probabilité qu'elle provienne du troisième fournisseur ?
4. Calculer la quantité des microprocesseurs défectueux reçus venant de fournisseur 3.
5. Le directeur choisit un autre microprocesseur au hasard et il l'envoie au laboratoire d'essais, qui révèle que l'unité n'est pas défectueuse. Quelle est la probabilité qu'elle ne provienne pas du troisième fournisseur ?

Exercice 3 : Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ un espace probabilisé fini, $\beta \in [0,1]$ et $X : \Omega \longrightarrow [\![-4,4]\!]$ une variable aléatoire. Soit le tableau suivant

k	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$\mathrm{P}_X(k)$	0,1	0,15	0,2	0,05	0,1	0,15	0,05	0,1	β

1. Déterminer β pour que $\Big(k, P_X(k)\Big)_{k\in[\![-4,4]\!]}$ soit la loi de probabilité de X.
2. Déterminer la fonction de répartition de X.
3. Calculer $E(X)$ et $V(X)$ et $P(-1 \leq X < 4,5)$.
4. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire $Z = X^2 + 1$.
5. Calculer $E(Z)$.

Exercice 4 : On considère deux dés équilibrés, chaque dé numeroté de 1 à 6. On réalise l'expérience suivante :
On lance les deux dés ensemble. Si le couple obtenu est $(4,6)$ ou $(5,5)$ ou $(6,4)$ on s'arrête, sinon on recommence jusqu'à l'obtention d'un de ces trois couples. On note n le nombre de lancers indépendants necessaires pour s'arrêter et on note S_k la somme des deux faces obtenues au k-ième lancer.
Quelle est la probabilité que pour tous les lancers effectues, les quantités S_k soient paires ?
On pourra considérer A_n l'événement ≪ les $n-1$ premiers lancers donnent des couples de somme paire sauf $(4,6)$ et $(5,5)$ et $(6,4)$, et le n-ième lancer donne $(4,6)$ ou $(5,5)$ ou $(6,4)$ ≫.