	Préing 2 Devoir Surveillé 3	
CY TECH	*Matière :* **Intégrations et probabilités** ***Le barème est donné à titre indicatif.***	*Date :* **lundi 5 juin 2023** *Durée :* **1h30** *Nombre de pages :* **2**

Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction et de la précision des justifications.
L'usage de tout appareil électronique est interdit. Aucun document n'est autorisé.
Le sujet comporte 4 exercices. L'ordre dans lequel ceux-ci sont traités n'est pas imposé.

♣ ♣ ♣

Exercice 1 : Soit Ω un domain borné de $\mathbb{R}^2$ défini par :

$$\Omega = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \quad -2 \leq x \leq 1 \quad , \quad x \leq y \leq 2 - x^2\right\},$$

et $\partial\Omega$ le bord de Ω. Soit $\omega = (x^2 + y)\mathrm{d}x + xy\ \mathrm{d}y$ une forme différentielle sur Ω.

1. Est-ce que ω est fermée, exacte sur Ω ? justifier
2. Représenter graphiquement l'ensemble $\partial\Omega$.
3. Donner une représentation paramétrique de $\partial\Omega$.
4. Calculer $I = \displaystyle\int_{\partial\Omega} \omega$
   (a) Par calcul direct.
   (b) Le théorème de Green -Riemann

Exercice 2 : Un sac contient des dés équilibrés D_1, D_2, D_3, D_4. Les dés D_1, D_2, D_3 sont numérotés de 1 à 6, et le dé D_4 est numéroté tel qu'on a 4 faces portant le nombre 2 et 2 faces portant le numbre 5. On tire un dé au hasard et on le jette, on obtient 2. Quelle est la probabilité que le dé tiré soit D_4 ?.

Exercice 3 : Une urne contient 7 boules numérotées de 1 à 7. On tire une boule au hasard. Soit **A** l'événément " la boule tirée a un nombre pair", et **B** l'événément " la boule tirée a un nombre divisible par 3".

1. Calculer $P(A)$, $P(B)$ et $P(A \cap B)$. Est-ce que A et B sont indépendants ?
2. Refaire les mêmes questions pour 8 boules.

Exercice 4 : Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ un espace probabilisé fini, $\beta \in [0,1]$ et $X : \Omega \longrightarrow [\![-2, 3]\!]$ une variable aléatoire. Soit le tableau suivant

k	-2	-1	0	1	2	3
$\mathrm{P}_X(k)$	0,1	0,15	0,2	0,25	0,1	β

1. Déterminer β pour que $\left(k, P_X(k)\right)_{k\in[\![-2,3]\!]}$ soit la loi de probabilité de X.
2. Déterminer la fonction de répartition de X.
3. Calculer $E(X)$ et $V(X)$.
4. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire $Z = X^2$.
5. Calculer $E(X^2)$ et $V(X^2)$.
6. En déduire $E(2X^2+1)$ et $V(2X^2+1)$.