Département de Mathématiques
PréING2 - Intégration et probabilités
31 Mai 2021
1h30

Correction DS3 - Intégration et probabilités

Consignes

- Appareils électroniques et documents interdits
- Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction et de la précision des justifications.
- Le sujet comporte cinq exercices. L'ordre dans lequel ceux-ci sont traités n'est pas imposé.

Exercice 1 : On note $\mathcal{E}$ l'ellipse d'équation $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, avec $(a,b)\in\mathbb{R}^2$, $a>0$, $b>0$, et D la partie de $\mathbb{R}^2$ définie par

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1\leq 0.$$

1. Calculer l'intégrale double
$$I=\iint_D (x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$
2. Calculer l'intégrale curviligne
$$J=\int_{\mathcal{E}}(y^3\,\mathrm{d}x-x^3\,\mathrm{d}y).$$
Indication : on peut utiliser les deux formules de linéarisation suivantes :
$$\cos^4(t)=\frac{1}{8}\left(\cos(4t)+4\cos(2t)+3\right)\quad\text{et}\quad\sin^4(t)=\frac{1}{8}\left(\cos(4t)-4\cos(2t)+3\right).$$
3. Quelle est la relation qui existe entre I et J ? Est-elle conforme à la formule de Green-Riemann ?

Solution 1

1. Soit le changement de variables
$$\begin{cases} x=a\rho\cos(\theta)\\ y=b\rho\sin(\theta)\end{cases}$$
La matrice jacobienne du changement de variable est
$$\begin{pmatrix} a\cos(\theta) & -a\rho\sin(\theta)\\ b\sin(\theta) & b\rho\cos(\theta)\end{pmatrix}$$
Le déterminant est alors $J=ab\rho$. Ainsi, après changement de variable,
$$\begin{aligned}
I &= \int_{\rho=0}^{1}\int_{\theta=0}^{2\pi}(a^2\rho^2\cos^2(\theta)+b^2\rho^2\sin^2(\theta))ab\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta\\
&= ab\left(\int_0^1\rho^3\,\mathrm{d}\rho\right)\times\left(\int_0^{2\pi}(a^2\cos^2(\theta)+b^2\sin^2(\theta))\,\mathrm{d}\theta\right)\\
&= ab\left[\frac{\rho^4}{4}\right]_0^1\times\left[a^2\left(\frac{\sin(2a)}{4}+\frac{1}{2}\right)+b^2\left(\frac{1}{2}-\frac{\sin(2a)}{4}\right)\right]_0^{2\pi}\\
&= \frac{ab}{4}\times(a^2+b^2)\pi.
\end{aligned}$$

2. Par le paramétrage direct

$$\begin{cases} x(t) = a\cos(t) & t \in [0, 2\pi] \\ y(t) = b\sin(t) \end{cases}$$

On obtient

$$J = \int_0^{2\pi} (-ab^3 \sin^4(t) - a^3 b \cos^4(t))\, \mathrm{d}t.$$

En utilisant la linéarisation, on obient

$$\begin{aligned} J &= -\frac{ab}{8} \int_0^{2\pi} ((b^2+a^2)\cos(4t) + 4(a^2-b^2)\cos(2t) + 3(a^2+b^2))\, \mathrm{d}t \\ &= -\frac{ab}{8}(a^2+b^2)\left[\frac{\sin(4t)}{4} + 3t\right]_0^{2\pi} - \frac{ab}{2}(a^2-b^2)\left[\frac{\sin(2t)}{2}\right]_0^{2\pi} \\ &= -\frac{3ab(a^2+b^2)\pi}{4}. \end{aligned}$$

3. Nous remarquons que $J = -3I$ ce qui est conforme à la formule de Green-Riemann. En effet, en posant $y^3\,\mathrm{d}x - x^3\,\mathrm{d}y = P(x,y)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y$, nous avons bien $\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = -3(x^2+y^2)$.

Exercice 2 : Soit Γ la courbe orientée dans le sens trigonométrique, constituée de la portion de la droite $y = x$ et de la portion de la parabole d'équation $y = x^2$, comprises entre les points d'intersection.

1. Calculer

$$I = \int_\Gamma (y + xy)\,\mathrm{d}x.$$

2. En utilisant la formule de Green-Riemann, retrouver la valeur de cette intégrale.

Solution 2

1. Les deux points d'intersection sont en (0 ;0) et (1 ;1). La première portion (sur la parabole) est paramétrée par $x = t$ et $y = t^2$ pour t variant de 0 à 1. La seconde portion (sur la droite) est paramétrée par $x = y = t$ pour t variant de 1 à 0 (attention !). Nous obtenons ainsi :

$$I = \int_0^1 (t^2 + t^3)\,\mathrm{d}t - \int_0^1 (t + t^2)\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{4}.$$

2. Posons $P(x,y) = y + xy$ et $Q(x,y) = 0$. Ainsi, $\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = -(1+x)$ et

$$-\iint_D (1+x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

avec $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x \le 1, x^2 \le y \le x\}$. D'où,

$$\begin{aligned} I &= -\int_0^1 \left(\int_{x^2}^x (1+x)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x \\ &= -\int_0^1 (1+x)(x-x^2)\,\mathrm{d}x \\ &= -\frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Exercice 3 : On jette trois fois un dé à 6 faces et on note a, b et c les résultats successivement obtenus. On note $P(X) = aX^2 + bX + c$. Déterminer la probabilité pour que le polynôme P ait :

1. deux racines réelles distinctes,
2. une racine réelle double.

Solution 3 Il y a 6^3 possibilités.

1. Les racines sont réelles et distinctes si et seulement si $\Delta > 0$, c'est-à-dire $b^2 > 4ac$.
   - $b = 1$: Impossible (pour a et c).
   - $b = 2$: $b^2 = 4$, impossible (pour a et c).
   - $b = 3$: $b^2 = 9$, $(a, c) = (1, 1), (1, 2), (2, 1)$.
   - $b = 4$: $b^2 = 16$, $(a, c) = (1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (3; 1)$.
   - $b = 5$: $b^2 = 25$, (a, c)=(1,1),(1,2),(1,3),(1 ;4),(1 ;5),(1 ;6),(2,1),(2 ;2),(2 ;3),(3 ;1),(3 ;2),(4 ;1),(5 ;1),(6 ;1).
   - $b = 6$: $b^2 = 36$, (a, c)=(1,1),(1,2),(1,3),(1 ;4),(1 ;5),(1 ;6),(2,1),(2 ;2),(2 ;3),(2 ;4),(3 ;1),(3 ;2),(4 ;1), (4 ;2), (5 ;1),(6 ;1).

   Au total, nous avons 38 cas possibles :
   $$\mathrm{P} = \frac{19 \times 2}{6^2 \times 3 \times 2} = \frac{19}{2^2 \times 3^3}.$$

2. Il y a une racine double si et seulement si $\Delta = 0 = b^2 - 4ac$, c'est-à-dire $b^2 = 4ac$, soit $b = 2\sqrt{ac}$. Ainsi, seuls les b pairs peuvent convenir.
   - $b = 2$: $(a, c) = (1, 1)$.
   - $b = 4$: donc $ac = 4$, donc $(a, c) = (1, 4), (4, 1), (2, 2)$.
   - $b = 6$: donc $ac = 9$, donc $(a, c) = (3, 3)$.

   Au total, nous avons 5 cas possibles :
   $$\mathrm{P} = \frac{5}{3^3 \times 2^3}.$$

Exercice 4 : Des études statistiques ont permis d'estimer que s'il fait beau un jour, la probabilité qu'il fasse beau le lendemain est 0,7. En revanche, s'il ne fait pas beau un jour, la probabilité qu'il fasse beau le lendemain n'est que 0,4.

1. Un mercredi, il fait beau. Quelle est la probabilité qu'il fasse beau le vendredi suivant ?
2. Quelle est la probabilité qu'il fasse beau un vendredi s'il n'a pas fait beau le mercredi précédent ?
3. Quelle est la probabilité P_n qu'il fasse beau le n-ième jour après un jour où il a fait beau ?
4. Quelle est la limite de P_n lorsque n tend vers $+\infty$?

Solution 4 Nous avons $\mathrm{P}(B_2|B_1) = 0.7$ et $\mathrm{P}(B_2|\overline{B_1}) = 0, 4$.

1.
$$\begin{aligned}\mathrm{P}(BJ) &= \mathrm{P}(BJ|BM)\underbrace{\mathrm{P}(BM)}_{=1} + \mathrm{P}(BJ|\overline{BM})\underbrace{\mathrm{P}(\overline{BM})}_{=0} \quad \text{(car il fait beau mercredi)} \\ &= \mathrm{P}(BJ|BM) = 0.7.\end{aligned}$$

   Donc
   $$\mathrm{P}(BV) = \mathrm{P}(BV|BJ)\mathrm{P}(BJ) + \mathrm{P}(BV|\overline{BJ})\mathrm{P}(\overline{BJ}) = 0.7 \times 0.7 + 0.4 \times (1 - 0.7) = 0.61.$$

2. $P(BJ) = 0.4$, $P(\overline{BJ}) = 0.6$, donc $P(BV) = 0.7 \times 0.4 + 0.4 \times 0.6 = 0.52$.
3. Nous avons $P_0 = 1$, $P_1 = 0.7$, $P_2 = 0.61$.

$$\begin{aligned}
P_n &= P(B_n|B_{n-1})P_{n-1} + P(B_n|\overline{B_{n-1}})\overline{P_{n-1}} = 0.7P_{n-1} + 0.4 \times (1 - P_{n-1}) \\
&= 0.4 + 0.3P_{n-1} = 0.4 + 0.3(0.4 + 0.3P_{n-2}) \\
&= \vdots \\
&= 0.4\sum_{k=0}^{n-1} 0.3^k + 0.3^3 P_0 \\
&= 0.4 \times \frac{1-0.3^n}{0.7} + 0.3^n \\
&= \frac{4}{7}(1-0.3^n) + 0.3^n.
\end{aligned}$$

4. Puisque $0 < 0.3 < 1$, il est clair que la limite vaut $\frac{4}{7}$.

Exercice 5 : Dans la forêt equatoriale, chaque naissance de gorilles donne un gorille gaucher avec une probabilité égale à 0.3. Un gorille gaucher sur trois a les yeux bleus, un gorille droitier sur quatre a les yeux bleus.

1. Calculer la probabilité pour qu'un gorille pris au hasard ait les yeux bleus.
2. Calculer la probabilité qu'un gorille ayant les yeux bleus soit gaucher.
3. Calculer la probabilité que pour six naissances, il y ait au moins un gorille gaucher aux yeux bleus.

Solution 5

1. Nous avons

$$P(B) = P(B|G)P(G) + P(B|D)P(D) = \frac{1}{3} \times 0.3 + \frac{1}{4} \times 0.7 = \frac{1}{10} + \frac{7}{40} = \frac{11}{40}.$$

2. Nous avons

$$P(G|B) = \frac{P(G \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B|G) \times P(G)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{3} \times 0.3}{\frac{11}{40}} = \frac{4}{11}.$$

3. Soit E l'événement 'pour six naissances, au moins un gorille gaucher aux yeux bleus'. Tout d'abord, la probabilité qu'un gorille soit gaucher et qu'il ait les yeux bleus est égale à

$$P(G \cap B) = \frac{3}{10} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{10}.$$

La probabilité qu'il n'ait pas ces deux caractéristiques simultanément est

$$P(\overline{G \cap B}) = \frac{9}{10}.$$

Par suite,

$$P(\overline{E}) = \left(P(\overline{G \cap B})\right)^6 = \left(\frac{9}{10}\right)^6 = 0.531.$$

Donc, $P(E) = 1 - 0.531441 = 0.469$.

<u>Autre méthode</u> : on peut considérer une variable aléatoire qui suit la loi binomiale.