Intégration et Probabilités

Contrôle Continu 2

◁ Consignes ▷

<u>Durée : 60 mn</u>

▶ Les documents et les supports électroniques sont interdits.
▶ L'épreuve est composée d'exercices indépendants.
▶ Le barème est à titre indicatif.
▶ La qualité de la rédaction et la rigueur des justifications seront prises en compte dans la notation.

◁ Sujet de l'épreuve ▷

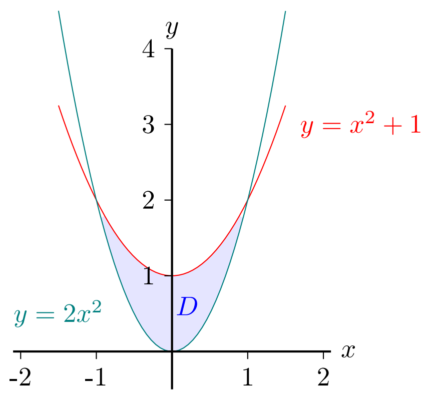
Exercice 1 (5 points)

1. Représenter graphiquement le domaine D délimité par les courbes d'équation $y = x^2 + 1$ et $y = 2x^2$.
2. Soit une fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$. Énoncer le théorème de Fubini par piles pour calculer

$$I = \iint_D f(x, y)dxdy.$$

Réponse.

1. On reconnaît les équations de deux paraboles, on en déduit le domaine :



2. Théorème de Fubini par pile : on pose les fonctions continues $\varphi_1(x) = 2x^2$ et $\varphi_2(x) = x^2 + 1$ et le domaine

$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ -1 \leq x \leq 1,\ \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\right\}.$$

Si f est une fonction continue sur D, alors

$$\iint_D f(x, y)dxdx = \int_{-1}^{1} \int_{2x^2}^{x^2+1} f(x, y)dydx.$$

Exercice 2 (8 points)

Soit l'application F définie par

$$F(x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\ln(t^2+x)}{1+t^2} dt.$$

1. Montrer que F est définie sur $\mathbb{R}_+$.
2. Montrer que $F \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+)$.
3. Montrer que $F \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+^\star)$ et calculer sa dérivée.
4. La fonction F admet-elle un minimum sur $\mathbb{R}_+$?

Réponse. 1. Montrer que F est bien définie sur $\mathbb{R}_+$. Soit la fonction f définie par $f(t,x) = \frac{\ln(t^2+x)}{1+t^2}$. On pose les domaines

$$A = \mathbb{R}_+ \text{ et } I = \mathbb{R}.$$

On remarque que pour $x=0$, la fonction $t \mapsto f(t,0)$ admet une singularité en 0, ce qui n'est pas le cas si $x > 0$.

- Si $x > 0$, alors la fonction $t \to f(t,x)$ est continue sur $\mathbb{R}$. On vérifie le comportement en $+\infty$:

$$f(t,x) \sim_{t\to+\infty} \frac{\ln(t^2)}{t^2}$$

donc $t^{\frac{3}{2}} f(t,x) \underset{t\to+\infty}{\to} 0$. Puisque la fonction $t \mapsto f(t,x)$ est paire en t, on a la même limite en $-\infty$. Ainsi, par le critère de Riemann avec $\alpha = \frac{3}{2} > 1$, l'intégrale $\int_I f(t,x)dt$ est convergente.

- Si $x = 0$, on a $f(t,0) = \frac{\ln(t^2)}{1+t^2}$. Cette fonction est continue sur $\mathbb{R}_+^\star$ et sur $\mathbb{R}_-^\star$. De plus, puisqu'elle est paire, on peut se limiter à l'étude sur $\mathbb{R}_+^\star$. En $+\infty$, on utilise le même argument que lorsque $x > 0$. En 0, on a

$$f(t,0) \sim_{t\to0^+} \ln(t^2),$$

donc $t^{\frac{1}{2}} f(t,0) \underset{t\to0^+}{\to} 0$. Par le critère de Riemann en 0, avec $\alpha = \frac{1}{2} < 1$, l'intégrale $\displaystyle\int_{\mathbb{R}_+^\star} f(t,0)dt$ est convergente.

On a donc montré que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, l'intégrale $\int_I f(t,x)dt$ est convergente, donc F est bien définie sur $\mathbb{R}_+$.

2. Cette question est plus difficile que la question 3. Il vaut mieux montrer d'abord la question 3, puis montrer que la fonction F est continue en 0. Cette question n'est donc que très peu prise en compte dans le barème. On donne ici la démonstration de la continuité de F sur $\mathbb{R}_+^\star$ dans un premier temps, puis on montrer ensuite la continuité de F en 0.

Pour montrer la continuité de F sur $\mathbb{R}_+^\star$, on utilise le théorème de continuité sous le signe intégrale. On remarque que pour la domination, on ne pourra pas borner uniformément en x la fonction $\ln(t^2+x)$ lorsque $x \to +\infty$. On va donc se restreindre à un intervalle $[\epsilon, A]$. Ainsi, si $x \in [\epsilon, A]$, on a $t^2 + x \geq t^2 + \epsilon \geq \epsilon$, et la fonction $y^{-\frac{1}{4}} \ln(y)$ est continue sur $[\epsilon, +\infty[$ et tend vers 0 par croissance comparée en $+\infty$. Elle est donc bornée par une constante K (qui dépend de ϵ) sur $[\epsilon; +\infty[$, et on a

$$\begin{aligned} \forall x \in [\epsilon; A],\ |f(t,x)| = \left| (t^2+x)^{\frac{1}{4}} \frac{\ln(t^2+x)}{(t^2+x)^{\frac{1}{4}}} \frac{1}{1+t^2} \right| &\leq K \left| \frac{t^2}{(1+t^2)^4} + \frac{x}{(1+t^2)^4} \right|^{\frac{1}{4}} \\ &\leqslant K \left(\frac{1}{(1+t^2)^3} + \frac{A}{(1+t^2)^4} \right)^{\frac{1}{4}} \leqslant K \frac{(1+A)^{\frac{1}{4}}}{(1+t^2)^{\frac{3}{4}}}. \end{aligned} \tag{1}$$

On utilisera cette fonction pour la domination. On applique le théorème sur $[\epsilon, A]$:

(a) Continuité : soit $t \in I$. L'application $x \mapsto f(t,x)$ est continue sur $[\epsilon, A]$.

(b) Continuité : soit $x \in [\epsilon, A]$. L'application $t \mapsto f(t,x)$ est continue sur $\mathbb{R}$.

(c) Domination : pour tout $(t,x) \in I \times [\epsilon, A]$, on a

$$|f(t,x)| \leqslant K \frac{(1+A)^{\frac{1}{4}}}{(1+t^2)^{\frac{3}{4}}},$$

qui est une fonction indépendante de x et intégrable sur $\mathbb{R}$.

D'après le théorème, F est continue sur $[\epsilon, A]$. Puisque ce résultat est vrai pour tout $0 < \epsilon < A$, on en déduit que F est continue sur $\mathbb{R}_+^\star$.

Montrons à présent que F est continue en 0. On se restreint à un intervalle en x, par exemple $[0;1]$, et on montre la continuité de F sur cet intervalle. Par parité, on va séparer $F(x) = F_-(x) + F_+(x)$ où

$$F_-(x) = \int_{-\infty}^{0} f(t,x)dt \text{ et } F_+(x) = \int_0^{+\infty} f(t,x)dt.$$

On va utiliser le théorème de convergence dominée sur F_+, le résultat est identique sur F_-. On sépare l'intervalle en deux $I_1 =]0;1] \cup]1;+\infty[$.

- Sur $]0;1]$, on a $t^2 + x \in]0;2]$. On remarque que la fonction $y \mapsto y^{\frac{1}{4}} \ln(y)$ est continue sur $]0;2]$ et prolongeable par continuité en 0, elle est donc bornée par une constante K_1. Ainsi on a

$$\forall x \in]0;1], \forall t \in]0;1],\ |f(t,x)| = \left|(t^2+x)^{\frac{1}{4}} \ln(t^2+x) \frac{1}{(t^2+x)^{\frac{1}{4}}(1+t^2)}\right| \leqslant \frac{K_1}{t^{\frac{1}{2}}}.$$

- Sur $]1;+\infty[$, on a de nouveau $t^2 + x > 1$, donc on peut réutiliser l'argument (1) avec $K_2 = K$

$$\forall x \in]0;1], \forall t \in J =]1;+\infty[,\ |f(t,x)| \leqslant \left|\frac{\ln(t^2+x)}{(t^2+x)^{\frac{1}{4}}} \frac{(t^2+x)^{\frac{1}{4}}}{1+t^2}\right| \leqslant K_2 \frac{2^{\frac{1}{4}}}{(1+t^2)^{\frac{3}{4}}}.$$

On définit donc la fonction utile pour la domination

$$\varphi(t) = K_1 t^{-\frac{1}{2}} \mathbf{1}_{]0;1]} + K_2 2^{\frac{1}{4}} (1+t^2)^{-\frac{3}{4}} \mathbf{1}_{]1;+\infty[}.$$

On applique le théorème de convergence dominée sur $]0;+\infty[$.

(a) Soit $t \in]0;+\infty[$. On définit $l(t) = \frac{\ln(t^2)}{1+t^2}$, et on a $\lim_{x\to 0^+} f(t,x) = l(t)$.

(b) Pour tout $x \in]0;1]$, la fonction $t \mapsto f(t,x)$ est continue sur $\mathbb{R}_+^\star$.

(c) La fonction $l(t)$ est continue sur $\mathbb{R}_+^\star$.

(d) Pour la domination, on a

$$\forall (t,x) \in \mathbb{R}_+^\star \times]0;1],\ |f(t,x)| \leqslant \varphi(t).$$

Ainsi, la fonction l est intégrable sur $\mathbb{R}_+^\star$ et $\lim_{x\to 0^+} F_+(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{1+t^2} dt$. La fonction F_+ est donc continue sur $[0;1]$. En procédant de même avec F_-, on montre que F_- est aussi continue sur $[0;-1]$. Ainsi, F est continue sur $[0;1]$.

3. Pour montrer que F est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^\star$, on utilise le théorème de dérivation sous le signe intégrale. On consid́ere l'intervalle $[\epsilon;+\infty[$. On a

(a) Pour tout $t \in \mathbb{R}$, la fonction $x \mapsto f(t,x)$ est $\mathcal{C}^1$ sur $[\epsilon;+\infty[$ et on a

$$\frac{d}{dx} f(t,x) = \frac{1}{t^2+x} \frac{1}{1+t^2}.$$

(b) Intégrabilité : on a déjà montré à la première question que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^\star$, la fonction $t \mapsto f(t,x)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.

(c) Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^\star$, la fonction $t \mapsto \frac{d}{dx} f(t,x)$ est continue sur $\mathbb{R}$.

(d) Domination :

$$\forall (t,x) \in \mathbb{R} \times [\epsilon;+\infty[, \quad \left|\frac{d}{dx} f(t,x)\right| \leqslant \frac{1}{\epsilon} \frac{1}{1+t^2}$$

qui est intégrable et indépendante de x.

Par application du théorème, la fonction F est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^\star$ et

$$F'(x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{t^2+x} \frac{1}{1+t^2} dt.$$

4. Puisque pour tout $x > 0$ on a $F'(x) > 0$, la fonction F est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^\star$. Par continuité sur $\mathbb{R}_+$, la fonction F atteint son minimum en 0.

Exercice 3 (7 points)

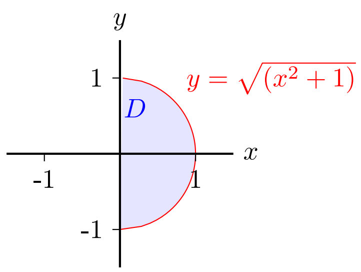
Dans un plan muni d'un repère orthonormé, on considère le domaine

$$\Omega = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ x \geq 0,\ x^2 + y^2 \leq 1\right\}.$$

1. Représenter graphiquement le domaine Ω.
2. Soit la fonction $f(x, y) = \exp\left(-x^2 - y^2\right)$. Calculer

$$\iint_\Omega f(x, y)\ dxdy.$$

Réponse. 1. On reconnaît un demi-cercle



2. On peut appliquer le changement de variable en polaire. On pose l'application $\varphi : (r, \theta) \mapsto (r\cos(\theta), r\sin(\theta))$. φ est un $\mathcal{C}^1$ difféomorphisme de $]0;1]\times]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$ sur $D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ -1 \leq y \leq 1,\ 0 \leq x \leq \sqrt{1-y^2}\right\}$. Pour un changement de variable en polaire on a $Jac(\varphi) = r$. Ainsi, puisque l'application f est continue sur $\overline{D}$, on a

$$\iint_D f(x, y) dxdy = \int_{r=0}^1 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{-r^2} r d\theta dr$$

et puisque l'intégrande est à variables séparées

$$\iint_D f(x, y) dxdy = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^1 re^{-r^2} dr = \pi \left[\frac{-1}{2} e^{-r^2}\right]_0^1 = \frac{\pi}{2}\left(1 - e^{-1}\right).$$