CY TECH	**Préing 2** **Devoir Surveillé 2** **Intégration et Probabilités**	
	L'usage de tout appareil électronique est interdit. Aucun document n'est autorisé.	*Date : 24/04/2024* *Durée :* **1h00**

Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction et de la précision des justifications.
Le sujet comporte 3 exercices. Le barème est donné à titre indicatif.

◇◇◇

Exercice 1 *Intégrale double* [7 points]

Soit

$$\Omega = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ y \geq 0 \ , \ x^2 + y^2 - x \geq 0 \ , \ x^2 + y^2 - 2x \leq 0\right\}$$

1. Représenter graphiquement l'ensemble Ω.
2. Calculer

$$\iint_{\Omega} \frac{x-y}{x^2+y^2} \, dx \, dy$$

Exercice 2 *Intégrale double* [6 points]

On fixe deux réels a,b tels que $0 < a < b$. On considère le domaine

$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ 0 < x < 1 \ , \ a \leq y \leq b\right\}$$

1. Montrer l'existence de :

$$J = \int_0^1 \frac{x^b - x^a}{ln(x)} \, dx$$

2. Calculer par deux méthodes (par piles et par tranches) :

$$\iint_D x^y \, dx \, dy$$

3. En déduire que :

$$J = \ln\left(\frac{b+1}{a+1}\right)$$

Indication :

$$\forall x > 0, \int x^y \, dy = \frac{x^y}{ln(x)}$$

Exercice 3 *Intégrale curviligne* [9 points]
Soit Ω un domaine borné de $\mathbb{R}^2$ défini par :

$$\Omega = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ -2 \leq x \leq 1 \ , \ x \leq y \leq 2 - x^2\right\}$$

On note $\partial\Omega$ le bord de Ω. Soit $\omega = (x^2 + y)\,dx + xy\,dy$ une forme différentielle sur Ω.

1. Est-ce que ω est fermée, exacte sur Ω? Justifier.
2. Représenter graphiquement l'ensemble $\partial\Omega$.
3. Donner une représentation paramétrique de $\partial\Omega$.
4. Calculer $I = \int_{\partial\Omega} \omega$.
   (a) Par calcul direct.
   (b) En utilisant le théorème de Green -Riemann

Exercice 4 *Intégrale triple* [3 points]
Calculer le volume du domaine

$$V = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x \geq 0 \ , \ y \geq 0 \ , \ x + y + z \leq 1\right\}$$