



## Préing 2 Devoir Surveillé 2

Matière : Intégrations et probabilités  
Le barème est donné à titre indicatif.

Date : Jeudi 6 avril 2023  
Durée : 1h30  
Nombre de pages : 2

Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction et de la précision des justifications.  
L'usage de tout appareil électronique est interdit. Aucun document n'est autorisé.  
Le sujet comporte 4 exercices. L'ordre dans lequel ceux-ci sont traités n'est pas imposé.



**Exercice 1 :** Soit  $D$  le triangle de sommets  $O$ ,  $A(1,1)$  et  $B(2,-1)$ .

1. Représenter graphiquement l'ensemble  $D$ .
2. Calculer  $\iint_D (x+2y)^2 dx dy$ .

**Exercice 2 :** Soit

$$\Omega = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 / y \geq 0, x^2 + y^2 - x \geq 0, x^2 + y^2 - 2x \leq 0 \right\}$$

1. Représenter graphiquement l'ensemble  $\Omega$ .
2. Calculer  $\iint_{\Omega} \frac{x-y}{x^2+y^2} dx dy$ .

**Exercice 3 :** On fixe deux réels  $a, b$  tels que  $0 < a < b$ . On considère le domaine

$$D = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 / 0 < x < 1, a \leq y \leq b \right\}$$

1. Montrer l'existence de  $J = \int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln(x)} dx$ .
2. Calculer  $\iint_D x^y dx dy$  par deux méthodes ( par piles et par tranches ).
3. En déduire que  $J = \ln\left(\frac{b+1}{a+1}\right)$ .

**Indication :**  $\forall x > 0, \int x^y dy = \frac{x^y}{\ln(x)}$ .

**Exercice 4 :** On fixe les réels  $a > 0$ . Soit

$$\Omega = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 + z^2 \leq 1 \right\}$$

1. Calculer le volume de  $\Omega$ .

2. Calculer  $\iiint_{\Omega} \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2 + 1} dx dy dz$ .