Département de Mathématiques
PréING2 - Intégration et probabilités
6 Mai 2021
1h30

# DS2 - Intégration et probabilités

---

Consignes

- Appareils électroniques et documents interdits
- Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction et de la précision des justifications.
- Le sujet comporte cinq exercices. L'ordre dans lequel ceux-ci sont traités n'est pas imposé.

**Exercice 1 :** Pour chacune des intégrales suivantes, représenter le domaine d'intégration $D \subset \mathbb{R}^2$ et calculer les intégrales.

1. $\displaystyle\iint_D (x+y)^{-2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ où $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0,\ y \geq 0,\ 1 \leq x \leq y^2 \leq 4\}$.
2. $\displaystyle\iint_D \frac{x^2+y^2}{x^2+y^2+1}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ où $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \leq 1\}$.
3. $\displaystyle\iint_D xy^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ où $D$ est le disque délimité par le cercle d'équation $x^2+y^2-2Rx = 0$, $R > 0$.

## Solution 1

1. Le domaine est l'ensemble des points du rectangle $[0,4] \times [0,2]$ situés au dessus de la courbe $y = \sqrt{x}$.

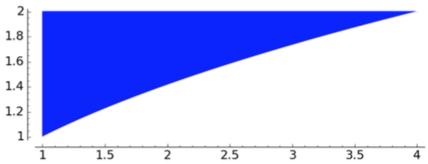


FIGURE 1 – Le domaine $D$.

La fonction à intégrer est définie sur $D$ puisque $x + y \neq 0$. Elle y est aussi continue. Nous pouvons donc utiliser l'un des deux théorèmes de Fubini.

$$\begin{aligned} I &= \int_{y=1}^{2}\left(\int_{x=1}^{y^2} \frac{1}{(x+y)^2}\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y = \int_{y=1}^{2}\left[-\frac{1}{x+y}\right]_1^{y^2}\mathrm{d}y \\ &= \int_1^2 \left(\frac{1}{1+y} - \frac{1}{y^2+y}\right)\mathrm{d}y. \end{aligned}$$

La seconde intégrale se décompose en éléments simples $\frac{1}{y^2+y} = \frac{1}{y(y+1)} = \frac{1}{y} - \frac{1}{y+1}$. Ainsi,

$$I = \int_1^2 \left(\frac{2}{1+y} - \frac{1}{y}\right)\mathrm{d}y = [2\ln(y+1) - \ln(y)]_1^2 = 2\ln(3) - 3\ln(2).$$

2. Les coordonnées polaires sont particulièrement adaptées (le domaine est le disque unité et la fonction fait intervenir le carré du rayon).

$$\begin{aligned} J &= \iint_D \frac{x^2+y^2}{x^2+y^2+1}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{\rho=0}^{1}\int_{\theta=0}^{2\pi}\frac{\rho^2}{1+\rho^2}\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta \\ &= 2\pi\int_0^1 \frac{\rho^3}{1+\rho^2}\,\mathrm{d}\rho = 2\pi\int_0^1\left(\rho-\frac{1}{2}\times\frac{2\rho}{1+\rho^2}\right)\mathrm{d}\rho \\ &= 2\pi\left[\frac{\rho^2}{2}-\frac{1}{2}\ln(1+\rho^2)\right]_0^1 = \pi(1-\ln(2)). \end{aligned}$$

3. Mettons l'équation de $D$ sous la forme canonique : $x^2+y^2-2Rx=0 \Leftrightarrow (x-R)^2+y^2=R^2$. C'est donc le cercle de centre $(R;0)$ et de rayon $R$. Effectuons alors le changement de variable polaire :

$$\begin{cases} x = R+\rho\cos(\theta) \\ y = \rho\sin(\theta) \end{cases}$$

Le jacobien est toujours $J_\varphi^d = \rho$ et $\Delta = \varphi^{-1}(D) = [0;R]\times[0;2\pi]$. Ainsi,

$$\begin{aligned} K &= \iint_D xy^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_\Delta (R+\rho\cos(\theta))\rho^2\sin^2(\theta)\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta \\ &= \int_{\rho=0}^{R}\rho^3\left(\int_{\theta=0}^{2\pi}(R\sin^2(\theta)+\rho\cos(\theta)\sin^2(\theta))\,\mathrm{d}\theta\right)\mathrm{d}\rho \\ &= \int_{\rho=0}^{R}\rho^3\left(\int_{\theta=0}^{2\pi}\left(R\frac{1-\cos(2\theta)}{2}+\rho\cos(\theta)\sin^2(\theta)\right)\mathrm{d}\theta\right)\mathrm{d}\rho \\ &= \int_0^R \rho^3\left[\frac{R\theta}{2}-\frac{R\sin(2\theta)}{4}+\frac{\rho^3}{3}\sin^3(\theta)\right]_{\theta=0}^{2\pi}\mathrm{d}\rho \\ &= \int_0^R R\pi\rho^3\,\mathrm{d}\rho = \frac{\pi R^5}{4}. \end{aligned}$$

**Exercice 2 :** Soit $0<a<b$ et

$$D = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid a\le x+y\le b \text{ et } \frac{1}{3}\le\frac{y}{x}\le 3\right\}.$$

Calculer

$$\iint_D \frac{e^{-(x+y)}}{\sqrt{xy}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

**Indication** : on pourra effectuer le changement de variables $x' = x+y$ et $y' = \frac{y}{x+y}$.

**Solution 2** Posons $(x',y') = \varphi(x,y) = (x+y, \frac{y}{x+y})$. La fonction $\varphi$ est $\mathcal{C}^2$ sur $D$ (le dénominateur est non nul). Elle est bijective : $(x,y) = \varphi^{-1}(x',y') = (x'(1-y'), x'y')$ de $D$ sur $\Delta = \varphi(D) = \{(x',y')\in\mathbb{R}^2 \mid a\le x'\le b \text{ et } \frac{1}{4}\le y'\le\frac{3}{4}\}$. En effet, $\frac{1}{y'} = 1+\frac{y}{x}\in[\frac{4}{3},4]$. Nous avons (attention le changement de variables est à l'envers)

$$J_{\varphi^{-1}}^d = \begin{vmatrix} 1-y' & -x' \\ y' & x' \end{vmatrix} = x' > 0.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
\iint_D \frac{e^{-(x+y)}}{\sqrt{xy}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \iint_\Delta \frac{e^{-x'}}{\sqrt{x'^2y'(1-y')}}x'\,\mathrm{d}x'\,\mathrm{d}y' \\
&= \int_{x'=a}^{b}\int_{y'=\frac{1}{4}}^{3/4} e^{-x'} \times \frac{1}{\sqrt{y'(1-y')}}\,\mathrm{d}y'\,\mathrm{d}x' \\
&= \int_{x'=a}^{b} e^{-x'}\,\mathrm{d}x' \times \int_{y'=\frac{1}{4}}^{3/4} \frac{\mathrm{d}y'}{\sqrt{y'(1-y')}} \\
&= (e^{-a}-e^{-b})\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} \frac{\mathrm{d}y'}{\sqrt{y'(1-y')}}.
\end{aligned}$$

On pose $u=\sqrt{y'}$ alors $\mathrm{d}y' = 2u\,\mathrm{d}u$. Ainsi

$$\begin{aligned}
\iint_D \frac{e^{-(x+y)}}{\sqrt{xy}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= (e^{-a}-e^{-b})\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{2u\,\mathrm{d}u}{u\sqrt{1-u^2}} \\
&= 2(e^{-a}-e^{-b})\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1-u^2}} \\
&= 2(e^{-a}-e^{-b})\,[\arcsin(u)]_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \\
&= 2(e^{-a}-e^{-b})\left[\frac{\pi}{6}\right] = \frac{\pi}{3}(e^{-a}-e^{-b}).
\end{aligned}$$

**Exercice 3 :** Soit $B$ la boule unité (de centre O et de rayon 1), et $a>1$. Calculer

$$\iiint_B \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}{\sqrt{x^2+y^2+(z-a)^2}}.$$

**Solution 3** En utilisant les coordonnées sphériques

$$\begin{cases} x &= r\sin\varphi\cos\theta \\ y &= r\sin\varphi\sin\theta \\ z &= r\cos\varphi, \end{cases}$$

avec $r\in[0,1]$, $\theta\in[-\pi,\pi]$ et $\varphi\in[0,\pi]$. On obtient

$$\begin{aligned}
\int\int\int_B \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}{\sqrt{x^2+y^2+(z-a)^2}} &= \int_0^1\int_{-\pi}^{\pi}\int_0^{\pi} \frac{r^2\sin\varphi}{\sqrt{r^2+a^2-2ar\cos\varphi}}\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi \\
&= 2\pi\int_0^1 r^2\int_0^{\pi}\frac{\sin\varphi}{\sqrt{r^2+a^2-2ar\cos\varphi}}\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}r
\end{aligned}$$

En effectuant le changement de variable

$$t = r^2+a^2-2ar\cos\varphi \quad\Longrightarrow\quad \mathrm{d}t = 2ar\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi$$

on trouve

$$\begin{aligned}
\int\int\int_B \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}{\sqrt{x^2+y^2+(z-a)^2}} &= 2\pi\int_0^1 r^2\int_{(r-a)^2}^{(r+a)^2}\frac{\mathrm{d}t}{2ar\sqrt{t}}\,\mathrm{d}r \\
&= \frac{4\pi}{a}\int_0^1 r^2\,\mathrm{d}r \\
&= \frac{4\pi}{3a}.
\end{aligned}$$

**Exercice 4 :**

I) Déterminer si les formes différentielles suivantes sont fermées, exactes (dans ce cas, calculer leur primitive) :

(a) $\omega = 2xy\,\mathrm{d}x + x^2\,\mathrm{d}y$,

(b) $\omega = 2xe^{x^2-y}\,\mathrm{d}x - 2e^{x^2-y}\,\mathrm{d}y$.

II) On considère la forme différentielle suivante : $\omega = (x^2+y^2-1)\,\mathrm{d}x - 2y\,\mathrm{d}y$.

(a) Montrer que $\omega$ n'est pas exacte.

(b) Déterminer une fonction $\phi$ telle que la forme différentielle $\omega_1 = \phi(x)\omega$ soit fermée.

(c) Montrer que $\omega_1$ est exacte et déterminer une primitive.

(d) Soit $\Gamma$ le cercle de centre $O(0,0)$ et de rayon $R$. Déterminer

$$\int_\Gamma \omega_1.$$

## Solution 4

I) On pose $\omega = P(x,y,z)\,\mathrm{d}x + Q(x,y,z)\,\mathrm{d}y + R(x,y,z)\,\mathrm{d}z$.

(a)
- Nous avons $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = 2x$, d'où $\omega$ est fermée.
- $\omega$ est définie (et fermée) sur $\mathbb{R}^2$ qui est un ouvert étoilé, donc d'après le théorème de Poincaré elle est exacte.
- Nous cherchons $f$ telle que $\mathrm{d}f = \omega$, ce qui équivaut à

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 2xy \\ \frac{\partial f}{\partial y} = x^2. \end{cases}$$

En intégrant la première ligne par rapport à $x$, on trouve $f(x,y) = x^2y + \phi(y)$. En dérivant l'expression que l'on vient d'obtenir par rapport à $y$ et en identifiant la deuxième ligne du système, on trouve $\frac{\partial f}{\partial y} = x^2 + \phi'(y) = x^2$. Il s'ensuit que $\phi(y) = 0$, et donc que $\phi(y) = c \in \mathbb{R}$. Par suite, les fonctions $f$ cherchées sont

$$f(x,y) = x^2y + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

(b) Nous avons $\frac{\partial P}{\partial y} = -2xe^{x^2-y}$ et $\frac{\partial Q}{\partial x} = -4xe^{x^2-y}$ la forme n'est donc pas fermée, et pas exacte non plus.

II) $\omega = (x^2+y^2-1)\,\mathrm{d}x - 2y\,\mathrm{d}y$

(a) En notant $\omega = P(x,y)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y$, nous avons $\frac{\partial P}{\partial y} = 2y$ et $\frac{\partial Q}{\partial x} = 0$. Donc $\omega$ n'est pas fermée, donc pas exacte.

(b) Posons $\omega_1(x,y) = \phi(x)\omega(x,y) = P_1(x,y)\,\mathrm{d}x + Q_1(x,y)\,\mathrm{d}y$. Nous cherchons $\phi$ tel que $\frac{\partial P_1}{\partial y} = \frac{\partial Q_1}{\partial x}$, c'est-à-dire $\phi(x)\frac{\partial P}{\partial y} = 2y\phi(x) = -2y\phi'(x) = \phi'(x)Q(x,y) + \phi(x)\frac{\partial Q}{\partial x}$. D'où, $\phi'(x) = -\phi(x)$, c'est-à-dire $\phi(x) = ce^{-x}$ avec $c \in \mathbb{R}$. On peut donc prendre $\phi(x) = e^{-x}$.

(c) Puisque $\omega_1$ est fermée sur l'ouvert étoilé $\mathbb{R}^2$, elle est exacte.
Nous cherchons $f$ telle que $\mathrm{d}f = \omega_1$, ce qui équivaut à

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = (x^2+y^2-1)e^{-x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} = -2ye^{-x}.s \end{cases}$$

La seconde ligne est plus facile à intégrer. En intégrant la seconde ligne par rapport à $y$, on trouve $f(x,y) = -y^2e^{-x} + \phi(x)$.
En dérivant l'expression que l'on vient d'obtenir par rapport à $x$ et en identifiant la première ligne du système, on trouve $\frac{\partial f}{\partial x} = y^2e^{-x} + \phi'(x) = y^2e^{-x} + (x^2-1)e^{-x}$. Il s'ensuit que $\phi'(x) = (x^2-1)e^{-x}$. Après deux intégrations par parties, nous trouvons $\phi(x) = -(x+1)^2e^{-x} + c$. Par suite, les fonctions $f$ cherchées sont

$$f(x,y) = -\left((x+1)^2 + y^2\right)e^{-x} + c,$$

où $c \in \mathbb{R}$.

(d) Puisque $\Gamma_1$ est un lacet et $\omega_1$ est exacte, nous avons

$$\int_\Gamma \omega_1 = 0.$$

**Exercice 5 :** En utilisant la formule de Green-Riemann, calculer l'aire du domaine :

$$K = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x \geq 0, y \geq 0 \text{ et } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1\right\},$$

où $a, b > 0$.

**Solution 5** Nous voulons calculer

$$\text{Aire de } K \ = \ \int\int_K 1 \ dxdy$$

en utilisant la *formule de Green-Riemann*. Pour cela, notons que

$$\int\int_K 1 \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \ = \ \int\int_K \frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right) \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y.$$

Ainsi, si on pose

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} &= \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) \implies Q(x,y) &= \frac{x}{2} + \text{cte} \\
-\frac{1}{2} &= \frac{\partial P}{\partial y}(x,y) \implies P(x,y) &= -\frac{y}{2} + \text{cte}
\end{aligned}$$

la *formule de Green-Riemann* nous permet, en choisissant $P(x,y) = -\frac{y}{2}$ et $Q(x,y) = \frac{x}{2}$, d'écrire :

$$\int\int_K 1 \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = \int_\Gamma -\frac{y}{2} \, \mathrm{d}x + \frac{x}{2} \, \mathrm{d}y$$

où $\Gamma$ est la frontière orientée du domaine $K$, c'est à dire :

$$\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$$

avec

$$\begin{aligned}
\Gamma_1 &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x \geq 0, \ y \geq 0, \ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\right\} \\
\Gamma_2 &= \{(0,y) : \ 0 \leq y \leq b\} \\
\Gamma_3 &= \{(x,0) : \ 0 \leq x \leq a\}.
\end{aligned}$$

Maintenant, sur le segment $\Gamma_2$ la coordonée $x$ est constant de valeur 0 :

$$x = 0 \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{d}x = 0.$$

Ainsi

$$\int_{\Gamma_2} -y\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y = \int_{\Gamma_2} 0\,\mathrm{d}y = 0.$$

De même, sur le segment $\Gamma_3$ la coordonée $y$ est constant de valeur 0 :

$$y = 0 \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{d}y = 0.$$

Ainsi

$$\int_{\Gamma_3} -y\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y = \int_{\Gamma_3} -0\,\mathrm{d}x = 0.$$

Par conséquent, en paramétrant $\Gamma_1$ à l'aide des coordonées polaires :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x & = & a\cos t \\ y & = & b\sin t \end{array} \right. \quad \Longrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcr} \mathrm{d}x & = & -a\sin t\,\mathrm{d}t \\ \mathrm{d}y & = & b\cos t\,\mathrm{d}t \end{array} \right.$$

on obtient

$$\begin{aligned} \text{Aire de } K &= \int\int_K 1\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ &= \frac{1}{2}\int_{\Gamma_3} -y\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} -b\sin(t)(-a\sin(t))\,\mathrm{d}t + a\cos(t)(b\cos(t))\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} ab\left(\sin^2(t) + \cos^2(t)\right)\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} ab\,\mathrm{d}t \; = \frac{\pi}{4}ab. \end{aligned}$$