Intégration et Probabilités

Contrôle Continu 1

◁ Consignes ▷

Durée : 60 mn

▶ Les documents et les supports électroniques sont interdits.
▶ L'épreuve est composée d'exercices indépendants.
▶ Le barème est à titre indicatif.
▶ La qualité de la rédaction et la rigueur des justifications seront prises en compte dans la notation.

◁ Sujet de l'épreuve ▷

Exercice 1 (4 pts)

1. Soit f et g deux fonctions définies sur l'intervalle $]0;+\infty[$. Énoncer le théorème d'intégration par parties sur un intervalle $]0;+\infty[$ en rappelant les hyptohèses.

2. Après avoir montré que l'intégrale suivante converge, calculer la valeur de

$$I = \int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t.$$

Réponse. 1. Si f et g sont $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ et que le produit fg admet une limite finie en 0 et en $+\infty$, c'est-à-dire :

$$\lim_{t\to 0} f(t)g(t) = \ell \in \mathbb{R}, \qquad \lim_{t\to+\infty} f(t)g(t)\ell' \in \mathbb{R}$$

alors les intégrales $\displaystyle\int_0^{+\infty} f'g$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} fg'$ ont la même nature. Si elles convergent alors

$$\int_0^{+\infty} f(t)g'(t)\,\mathrm{d}t = \Big[f(t)g(t)\Big]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} f(t)g'(t)\,\mathrm{d}t.$$

2. On va procéder par intégration par partie. On pose $f : t \mapsto \ln(t)$ et $g : t \mapsto \dfrac{-1}{t}$. Les fonctions f et g sont C^1 sur $]0,+\infty[$ et on a

$$\lim_{t\to 1} f(t)g(t) = \lim_{t\to 1} \frac{-\ln(t)}{t} = \frac{-\ln(1)}{1} = 0,$$
$$\lim_{t\to+\infty} f(t)g(t) = \lim_{t\to+\infty} \frac{-\ln(t)}{t} = 0 \quad \text{car } \ln(t) \underset{t\to+\infty}{\ll} t.$$

Le théorème de l'intégration par partie nous dit donc que I a la même nature que

$$\int_1^{+\infty} f'(t)g(t)\,\mathrm{d}t = \int_1^{+\infty} \frac{-1}{t^2}\,\mathrm{d}t$$

qui est convergente car intégrale de Riemann en $+\infty$ avec $\alpha = 2 > 1$ donc I converge. De plus

$$\begin{aligned} I &= \left[\frac{-\ln(t)}{t}\right]_1^{+\infty} - \int_1^{+\infty} \frac{-1}{t^2}\,\mathrm{d}t \\ &= 0 - 0 - \left[\frac{1}{t}\right]_1^{+\infty} \\ &= -0 + 1 = 1. \end{aligned}$$

Exercice 2 (5 pts)

Déterminer la nature de l'intégrale suivante

$$I = \int_1^{+\infty} \ln(t-1) - \ln(t)\,\mathrm{d}t.$$

Réponse. On pose $f : t \mapsto \ln(t-1) - \ln(t)$. La fonction f est continue sur $]1, +\infty[$ car somme de logarithmes qui sont continus sur cet intervalle. Pour déterminer la nature de I il faut donc étudier la convergence de l'intégrale au voisinage de 1 et la convergence au voisinage de $+\infty$. Séparons I en deux parties :

$$I = \int_1^2 f(t)\,\mathrm{d}t + \int_2^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

et étudions en premier la deuxième partie, la convergence de l'intégrale de f au voisinage de l'infini. Nous allons raisonner par équivalence. En utilisant le développement limité de $u \mapsto \ln(1+u)$ quand $u \to 0$ on a

$$f(t) = \ln\left(\frac{t-1}{t}\right) = \ln\left(1 - \frac{1}{t}\right) \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{-1}{t}.$$

On remarque que $t \to \dfrac{-1}{t}$ est continu, de signe constant (négatif) et non-nulle sur $[2, +\infty[$, le théorème d'équivalence pour les intégrales généralisées nous dit alors que les intégrales $\displaystyle\int_2^{+\infty} f$ et $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{-1}{t}\,dt$ ont la même nature. On reconnait une intégrale de Riemann divergente ($\alpha = 1 \leq 1$) et on en déduit que l'intégrale $\displaystyle\int_2^{+\infty} f$ diverge. Par définition des intégrales généralisées, on conclut que l'intégrale I diverge.

Exercice 3 (4 pts)

Déterminer la nature et, si elle converge, calculer la valeur de l'intégrale

$$J = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{t}}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t.$$

Réponse. Pour étudier la nature de J on va procéder par changement de variable. On pose $u = \sqrt{t}$, la fonction $t \to \sqrt{t}$ est C^1 sur $]0, +\infty[$ et elle est strictement croissante donc c'est une bijection, elle envoie $]0, +\infty[$ sur lui-même. Le théorème du changement de variable nous dit alors que J a la même nature que l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u} 2u\,\mathrm{d}u = 2\int_0^{+\infty} e^{-u}\,\mathrm{d}u$$

qui est convergente (intégrale de référence), donc J converge. De plus

$$J = 2\int_0^{+\infty} e^{-u}\,\mathrm{d}u = 2\left[-e^{-u}\right]_0^{+\infty} = 2(-0+1) = 2.$$

Exercice 4 (7 pts)

On considère la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies sur $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$ par

$$f_n(t) = \frac{1}{1 + (1 + \sin(t))^n}.$$

1. Selon la valeur de $t \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$ déterminer la limite $\lim\limits_{n\to+\infty} \big(1 + \sin(t)\big)^n$.
2. Calculer, si elle existe, la limite $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} f_n(t)\,\mathrm{d}t$.

Réponse. 1. La valeur de la limite demandée dépend du signe de $\sin(t)$, on peut distinguer 3 cas :

Si $t \in \left[-\frac{\pi}{4}, 0\right[$ alors $-1 < \sin(t) < 0$ donc $|1+\sin(t)| < 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \big(1+\sin(t)\big)^n = 0$

Si $t = 0$ alors $\sin(t) = 0$ donc $1+\sin(t) = 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \big(1+\sin(t)\big)^n = 1$

Si $t \in \left]0, \frac{\pi}{4}\right]$ alors $0 < \sin(t) < 1$ donc $1+\sin(t) > 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \big(1+\sin(t)\big)^n = +\infty$

2. On va utiliser le théorème de convergence dominée sur l'intervalle d'intégration $I = \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$:

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est continue sur I comme quotient de fonctions continues avec un dénominateur non nul puisque pour tout $t \in I$, $1+\sin(t) \geq 0$.
- On déduit de la question 1 que la suite de fonction (f_n) converge simplement sur I vers la fonction

$$f : t \mapsto \left| \begin{array}{ll} 1 & \text{si } t \in \left[-\frac{\pi}{4}, 0\right[\\ \frac{1}{2} & \text{si } t = 0 \\ 0 & \text{si } t \in \left]0, \frac{\pi}{4}\right]. \end{array} \right.$$

  La limite simple f est bien continue par morceaux sur I.
- Pour tout $t \in I$, $1+\sin(t) \geq 0$ donc $f_n(t) \leq 1$. Posons $\varphi : t \mapsto 1$, cette fonction est continue et intégrable sur I puisqu'elle est constante et I est borné, et on a $\forall t \in I, n \in \mathbb{N}$, $|f_n(t)| \leq \varphi(t)$.

Le théorème de convergence dominée nous permet donc d'affirmer que f est intégrable et que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_I f_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_I f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\pi/4}^{0} 1\,\mathrm{d}t + \int_0^{\pi/4} 0\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{4}.$$

Remarque : *Le théorème de convergence dominée a été énoncé dans le cours avec hypothèse de continuité de la limite simple f sur l'intervalle I. Néanmoins, il a été mentionné que tous les résultats de ce chapitre peuvent être étendus au cas de fonctions qui sont seulement continues par morceaux.*
En l'occurence pour cet exercice, on aurait aussi pu séparer l'intervalle I en deux morceaux $\left[-\frac{\pi}{4}, 0\right[$ et $\left]0, \frac{\pi}{4}\right]$ afin d'appliquer le théorème de convergence dominée avec une limite simple continue sur chacun des morceaux. La relation de Chasles permet alors de retrouver le résultat ci-dessus.