CY TECH	**Préing 2** **Devoir Surveillé 1**	
	Matière : **Intégration et probabilités** L'usage de tout appareil électronique est interdit Le barème est donné à titre indicatif.	*Date :* **Mercredi 13 Mars 2024** *Durée :* **1h** *Nombre de pages :* **1**

Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction et de la précision des justifications.

Exercice 1 (6 points)

a) Soit f une fonction continue et positive sur l'intervalle $[1, +\infty)$. Énoncer le critère de Riemann pour l'intégrale $\int_1^{+\infty} f(x)dx$.

Application : On considère l'intégrale

$$I = \int_1^{+\infty} \exp(-\ln(x)^2)dx.$$

Montrer que cette intégrale converge. Donner une interprétation graphique.

b) Donner la formule du changement de variable en rappelant toutes les hypothèses.

Application : On considère l'intégrale

$$J = \int_1^{+\infty} \frac{1}{(x-1)^{\frac{3}{4}} x^{\frac{5}{4}}} dx.$$

Montrer que cette intégrale converge. Déterminer la valeur de cette intégrale à partir du changement de variable $u = \frac{1}{x}$.

Exercice 2 (4 points)

Montrer que pour $n \geq 2$, l'intégrale u_n définie par

$$u_n := \int_0^{\frac{1}{4}} \frac{1}{t \ln(t)^n} dt$$

est convergente. La série $\sum u_n$ pour $n \geq 2$ est-elle convergente ? Justifier.

Exercice 3 (8 points)

Déterminer la nature des intégrales suivantes. Pour les intégrales convergentes, déterminer leur valeur.

$$I_1 = \int_1^e \frac{\exp(-\ln(x)^{\frac{1}{2}})}{\ln(x)^{\frac{1}{2}} x} dx. \qquad I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(x)}{1-\cos(x)} dx;$$

$$I_3 = \int_2^{+\infty} \frac{2}{x^3 - 3x^2 + 4x - 2} dx; \qquad I_4 = \int_1^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x^3} dx;$$

Exercice 4 (4 points)

Soit la fonction polynomiale f et le domaine D définis par

$$f(x, y) = (x + y)^2 \quad \text{et} \quad D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ x \leq 1, \ 0 \leq y, \ y \leq x\right\}.$$

Représenter le domaine D puis calculer l'intégrale $\iint_D f(x, y)dxdy$.