Préing 2
Devoir Surveillé 2

Matière : **Intégrations et probabilités**	*Date :* **Jeudi 9 mars 2023**
Le barème est donné à titre indicatif.	*Durée :* **1h30**
	Nombre de pages : **2**

Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction et de la précision des justifications.
L'usage de tout appareil électronique est interdit. Aucun document n'est autorisé.
Le sujet comporte **5** *exercices. L'ordre dans lequel ceux-ci sont traités n'est pas imposé.*

♣ ♣ ♣

Exercice 1 : Étudier la nature des intégrales suivantes et donner la valeur de l'intégrale, lorsque cela a un sens :

1. $I_1 = \displaystyle\int_0^{+\infty} x^2 e^{-5x}\, dx.$
2. $I_2 = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(t^2+5t)}.$
3. $I_3 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos(x)}{\sqrt{\sin(x)}}\, dx.$
4. $I_4 = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{exp(Arctan(x))}{x^2+1}\, dx.$

Indication : Vous pouvez faire les calculs avant d'étudier la nature de chaque intégrale si cela est plus facile.

Exercice 2 : Étudier la nature des intégrales suivantes :

1. $J_1 = \displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{\ln(\cos(\frac{1}{x}))}{(\ln(x))^3}\, dx.$
2. $J_2 = \displaystyle\int_1^{2} (x-1)^{\alpha-3}(2-x)^{\beta+2}\, dx \ , \ (\alpha, \beta \in \mathbb{R}).$

Exercice 3 : On admet les égalités suivantes

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t^2+1}\, dt = 0 \ , \qquad \int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^2+1} = \frac{\pi}{2}.$$

A l'aide du changement de variable suivant $y = ae^{-x}$ avec $a > 0$, montrer que

$$J = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{a^2e^{-x}+e^x}\, dx = \frac{\pi\ln(a)}{2a}.$$

Exercice 4 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère l'intégrale

$$I_n = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^n}.$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'intégrale I_n converge.
2. Montrer la relation suivante : $I_{n+1} = \dfrac{2n-1}{2n} I_n$.
3. En déduire la valeur de I_5.
4. En déduire la valeur de l'intégrale suivante $J = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^5}$.

Exercice 5 : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x,y) = x^2 \cdot y^2$$

et D un domaine de $\mathbb{R}^2$ défini par

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1 \quad , \quad x-1 \leq y \leq -x+1\right\}.$$

1. Représenter graphiquement le domaine D.

2. Calculer $\displaystyle\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\ \mathrm{d}y$.