DS1 : Intégration et probabilités

Exercice 1 :

1. Calculer

$$F(x) = \int_1^x \frac{1}{t\sqrt{t^2+1}}dt$$

A l'aide du changement de variable $u = \sqrt{t^2+1}$

2. Montrer avec les règles de Riemann que

$$I = \int_1^{+\infty} \frac{1}{t\sqrt{t^2+1}}dt$$

Converge.

3. Calculer

$$I = \int_1^{+\infty} \frac{1}{t\sqrt{t^2+1}}dt$$

Exercice 2 :

Soit $I = \int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t^2+a^2}dt$ avec $a > 0$.

Pour tout $\varepsilon > 0$ et pour tout $X > 0$ on définit : $I_{\varepsilon,X} = \int_\varepsilon^X \frac{\ln(t)}{t^2+a^2}dt$

1. Montrer que I est une intégrale convergente.
2. A l'aide du changement de variable $t = \frac{a^2}{x}$ montrer que :

$$I_{\varepsilon,X} = -\frac{2\ln(a)}{a}\arctan\left(\frac{a}{X}\right) + \frac{2\ln(a)}{a}\arctan\left(\frac{a}{\varepsilon}\right) + \int_{\frac{a^2}{\varepsilon}}^{\frac{a^2}{X}} \frac{\ln(t)}{t^2+a^2}dt$$

3. En faisant tendre ε vers 0 et X vers $+\infty$ dans l'équation ci-dessus et en déduire une relation vérifiée par I, puis la valeur de I.

Exercice 3 :

1. Soit F la fonction définie par :

$$F(x) = \int_1^x \frac{\ln(1+t^2)}{t^2}dt$$

Calculer $F(x)$.

2. En déduire que l'intégrale

$$I = \int_1^{+\infty} \frac{\ln(1+t^2)}{t^2}dt$$

Est convergente et déterminer sa valeur.