Département de Mathématiques

Préing 2 - Intégration et Probabilité

2021 - 2022

TD Revision - Intégrales Généralisées

Exercice 1. *Étudier la nature des intégrales :*

a) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1-\cos x}{x^2} dx.$

b) $\displaystyle\int_{-1}^{0} \frac{dx}{x(x+2)}.$

c) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{x^{\frac{17}{5}}+1} dx.$

d) $\displaystyle\int_{-\infty}^{-1} \frac{e^{\cos x}}{x} dx.$

e) $\displaystyle\int_3^{+\infty} \frac{\arctan(x)}{x^2+2x+7} dx.$

f) $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x(\ln(x))^2}.$

Solution :

a) Posons $f(x) = \dfrac{1-\cos x}{x^2}$. Cette fonction est continue sur $\mathbb{R}^*$ donc sur $[1;+\infty[$. Pour étudier la convergence de l'intégrale, il suffit donc d'étudier le comportement au voisinage de l'infini. Maintenant $|\cos x| \leq 1$, donc

$$\left|\frac{1-\cos x}{x^2}\right| \leq \frac{|1-\cos x|}{x^2} \leq \frac{1+|\cos x|}{x^2} \leq \frac{2}{x^2},$$

avec $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2}$ convergente (c'est une intégrale de Riemann $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^{x}}$ avec $\alpha = 2 > 1$), donc, par comparaison, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1-\cos x}{x^2}\, \mathrm{d}x$ est convergente.

b) Posons $f(x) = \dfrac{1}{x(x+2)}$. La fonction f est continue sur $\mathbb{R}\backslash\{-2,0\}$ donc sur $[-1;0[$. Pour étudier la convergence de l'intégrale, il suffit donc de regarder ce qui se passe au voisinage de 0. Soit $-1 < \varepsilon < 0$, on doit étudier

$$\int_{-1}^{\varepsilon} \frac{\mathrm{d}x}{x(x+2)}.$$

Cherchons λ et μ tels que $\dfrac{1}{x(x+2)} = \dfrac{\lambda}{x} + \dfrac{\mu}{x+2}$:

$$\frac{1}{x(x+2)} = \frac{\lambda}{x} + \frac{\mu}{x+2} \iff \frac{1}{x(x+2)} = \frac{\lambda(x+2)+\mu x}{x(x+2)} = \frac{(\lambda+\mu)x+2\lambda}{x(x+2)}$$
$$\iff \begin{cases} \lambda+\mu = 0 \\ 2\lambda = 1 \end{cases} \iff \lambda = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \mu = -\frac{1}{2}$$

Ainsi, $\dfrac{1}{x(x+2)} = \dfrac{1}{x} + -\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{x+2}$ et donc :

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{\varepsilon} \frac{\mathrm{d}x}{x(x+2)} &= \frac{1}{2}\int_{-1}^{\varepsilon} \frac{\mathrm{d}x}{x} - \frac{1}{2}\int_{-1}^{\varepsilon} \frac{\mathrm{d}x}{x+2} = \frac{1}{2}[\ln|x|]_{-1}^{\varepsilon} - \frac{1}{2}[\ln|x+2|]_{-1}^{\varepsilon} \\ &= \frac{1}{2}(\ln|\varepsilon| - \ln 1) - \frac{1}{2}(\ln|\varepsilon+2| - \ln 1) = \frac{1}{2}\ln|\varepsilon| - \frac{1}{2}\ln|\varepsilon+2| \underset{\varepsilon\to 0}{\to} -\infty,\end{aligned}$$

donc l'intégrale $\displaystyle\int_{-1}^{0} \frac{\mathrm{d}x}{x(x+2)}\mathrm{d}x$ diverge.

<u>AUTRE MÉTHODE</u> : Si $-1 \leq x \leq 0$, on a $1 \leq x+2 \leq 2$ d'où $\frac{1}{2} \leq \frac{1}{x+2} \leq 1$ et donc

$$\left|\frac{1}{x(x+2)}\right| \geq \frac{1}{2}\frac{1}{|x|}$$

Puisque l'intégrale $\displaystyle\int_{-1}^{0} \frac{\mathrm{d}x}{|x|}$ est divergente (c'est une intégrale de Riemann), on en déduit que $\displaystyle\int_{-1}^{0} \frac{dx}{x(x+2)}$ diverge par comparaison

c) Posons $f(x) = \dfrac{x^2}{x^{17/5}+1}$. Cette fonction est continue sur $]0;+\infty[$. De plus, si $x > 0$, on a

$$x^{17/5} + 1 > 1$$

donc le dénominateur ne s'annule jamais. Pour étudier la convergence de l'intégrale, il suffit donc d'étudier le comportement au voisinage de $+\infty$. On a, puisque

$$x^{17/5} + 1 \geq x^{17/5}$$

que

$$\frac{1}{x^{17/5}+1} \leq \frac{1}{x^{17/5}}.$$

Donc

$$\left|\frac{x^2}{x^{17/5}+1}\right| = \frac{x^2}{x^{17/5}+1} \leq \frac{x^2}{x^{17/5}} = \frac{1}{x^{\frac{17}{5}-2}} = \frac{1}{x^{\frac{17}{5}-\frac{10}{5}}} = \frac{1}{x^{7/5}},$$

avec $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^{7/5}}$ convergente (c'est une intégrale de Riemann $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^{a}}$ avec $\alpha = \frac{7}{5} > 1$) donc, par comparaison, l'intégrale $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{x^2}{x^{17/5}+1}\,\mathrm{d}x$ converge.

d) Posons $f(x) = \dfrac{e^{\cos x}}{x}$. Cette fonction est continue sur $\mathbb{R}^*$ donc sur $]-\infty;-1]$. Pour étudier la convergence de l'intégrale, il suffit donc d'étudier le comportement au voisinage de $-\infty$. Puisque $-1 \leq \cos x \leq 1$, on a $e^{-1} \leq e^{\cos x} \leq e$. Pour tout $x < -1$, nous avons donc

$$\frac{e^{-1}}{x} \geq \frac{e^{\cos x}}{x} \geq \frac{e}{x},$$

avec $\displaystyle\int_{-\infty}^{-1} \frac{e}{x} \cdot \mathrm{d}x$ divergente (c'est une intégrale de Riemann $\displaystyle\int_{-\infty}^{-1} \frac{\mathrm{d}x}{x^{\alpha}}$ avec $\alpha = 1$ qui n'est pas $>$ 1) donc, par comparaison, l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{-1} \frac{e^{\cos x}x}{x}\,\mathrm{d}x$ diverge.

e) Le polynôme x^2+2x+7 n'est jamais nul. De plus

$$\left|\frac{\arctan(x)}{x^2+2x+7}\right| \leq \frac{\frac{\pi}{2}}{x^2} = \frac{\pi}{2x^2}$$

avec $\int_3^{+\infty} \frac{\pi}{2x^2}dx$ convergente (c'est une intégrale de Riemann $\int_3^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^a}$ avec $\alpha = 2 > 1$). Donc $\int_3^{+\infty} \frac{\arctan(x)}{x^2+2x+7}dx$ converge absolument.

f) En effectuant le changement de variable $u = \ln(x)$, nous pouvons écrire

$$\int \frac{dx}{x(\ln(x))^2} = \int \frac{du}{u^2} = -\frac{1}{u} = -\frac{1}{\ln(x)} \quad \Longrightarrow \quad \int_2^{+\infty} \frac{dx}{x(\ln(x))^2} = \left[-\frac{1}{\ln(x)}\right]_2^{+\infty} = \frac{1}{\ln(2)}.$$

Donc $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x(\ln(x))^2}$ converge.

Exercice 2. *Étudier pour quelles valeurs de $n \in \mathbb{N}$, l'intégrale*

$$I(n) = \int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^n} dx$$

converge et calculer $I(n)$ dans ce cas.

Solution : Rappelons que l'intégrale de Bertrand $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^\alpha (\ln x)^\beta}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$ ou $\alpha = 1$ et $\beta > 1$. Ainsi $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^n(\ln x)^{-1}}$ qui converge si et seulement si $n \geq 2$.

Si $n \geq 2$, intégrons par parties $\int \frac{\ln x}{x^n}dx$. On a

$$\int \frac{\ln x}{x^n}dx = \frac{x^{-n+1}}{-n+1}\ln x - \int \frac{x^{-n+1}}{-n+1}\frac{1}{x}dx = \frac{x^{-n+1}}{-n+1}\ln x - \frac{x^{-n+1}}{(n-1)^2},$$

et donc

$$I(n) = \left[\frac{x^{-n+1}}{-n+1}\ln x - \frac{x^{-n+1}}{(n-1)^2}\right]_1^{\infty} = \frac{1}{(n-1)^2}.$$

Exercice 3. *Étudier la nature des intégrales :*

$$I = \int_2^{+\infty} \left(1-\cos\left(\frac{1}{t}\right)\right) dt \quad ; \quad J = \int_0^1 \sin\left(\frac{1}{t}\right) dt \quad ; \quad K = \int_{\frac{2}{\pi}}^{+\infty} \ln\left(\cos\left(\frac{1}{t}\right)\right) dt.$$

Solution :

$I = \int_2^{+\infty} \left(1-\cos\left(\frac{1}{t}\right)\right) dt$: Il y a un problème en $+\infty$. En effectuant un développement limite en $+\infty$, nous avons

$$1-\cos\left(\frac{1}{t}\right) = 1 - \left(1 - \frac{\left(\frac{1}{t}\right)^2}{2!} + o\left(\frac{1}{t^2}\right)\right) = \frac{1}{2t^2} + o\left(\frac{1}{t^2}\right) \sim \frac{1}{2t^2}.$$

Or $\int_2^{+\infty} \frac{1}{2t^2}dt$ est une intégrale de Riemann avec $\alpha = 2 > 1$. L'intégrale I converge.

$J = \displaystyle\int_0^1 \sin\left(\frac{1}{t}\right) dt$: Il y a un problème en 0, mais attention on ne peut pas faire de développement limité de $t \to \sin\left(\dfrac{1}{t}\right)$ car la variable $\frac{1}{t}$ tend vers l'infini. Pout tout $0 < \epsilon < 1$, on pose $J(\epsilon) = \displaystyle\int_\epsilon^1 \sin\left(\frac{1}{t}\right) dt$, puis on fait le changement de variable

$$u = \frac{1}{t} \Longleftrightarrow t = \frac{1}{u},\ dt = -\frac{du}{u^2}. \quad \text{De plus } t = \epsilon \Longrightarrow u = \frac{1}{\epsilon} \text{ et } t = 1 \Longrightarrow u = 1$$

Ainsi

$$J(\epsilon) = \int_\epsilon^1 \sin\left(\frac{1}{t}\right) dt = \int_1^{\frac{1}{\epsilon}} \sin(u)\left(-\frac{du}{u^2}\right) = -\int_1^{\frac{1}{\epsilon}} \frac{\sin(u)}{u^2} du.$$

Maintenant, $\frac{1}{\epsilon} \to +\infty$, il s'agit donc de voir si la fonction $u \to \frac{\sin(u)}{u^2}$ est intégrable en $+\infty$. Nous avons

$$\left|\frac{\sin(u)}{u^2}\right| \leq \frac{1}{u^2}$$

Or $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{u^2} du$ est une intégrale de Riemann avec $\alpha = 2 > 1$. Donc la fonction $u \to \frac{\sin(u)}{u^2}$ est absolument intégrable en $+\infty$ donc intégrable et J converge.

$K = \displaystyle\int_{\frac{2}{\pi}}^{+\infty} \ln\left(\cos\left(\frac{1}{t}\right)\right) dt$: Attention il y a deux problèmes, un en $\dfrac{2}{\pi}$ parce que $\cos\left(\dfrac{2}{\frac{2}{\pi}}\right) = \cos\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$ et un autre en $+\infty$. Soit $a > \frac{2}{\pi}$, en $\dfrac{2}{\pi}$ on pose

$$u = t - \frac{2}{\pi} \Longleftrightarrow t = u + \frac{2}{\pi},\ dt = du \quad \text{De plus } t = \frac{2}{\pi} \Longrightarrow u = 0 \text{ et } t = a \Longrightarrow u = a - \frac{2}{\pi}$$

alors

$$\begin{aligned}
\ln\left(\cos\left(\frac{1}{t}\right)\right) &= \ln\left(\cos\left(\frac{1}{u + \frac{2}{\pi}}\right)\right) = \ln\left(\cos\left(\frac{1}{\frac{2}{\pi}\left(1 + \frac{\pi}{2}u\right)}\right)\right) = \ln\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\frac{1}{1 + \frac{\pi}{2}u}\right)\right) \\
&= \ln\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\left(1 - \frac{\pi}{2}u + o(u)\right)\right)\right) = \ln\left(\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi^2}{4}u + o(u)\right)\right) \\
&= \ln\left(\sin\left(\frac{\pi^2}{4}u + o(u)\right)\right) = \ln\left(\frac{\pi^2}{4}u + o(u)\right) = \ln\left(\frac{\pi^2}{4}\right) + \ln(u + o(u)) \sim \ln(u)
\end{aligned}$$

Or pour tout $a > \frac{2}{\pi}$, nous avons

$$\begin{aligned}
\int_0^{a - \frac{2}{\pi}} \ln(u) du &= \Big[u\ln(u) - u\Big]_0^{a - \frac{2}{\pi}} \\
&= (a - \frac{2}{\pi})\ln\left(a - \frac{2}{\pi}\right) - (a - \frac{2}{\pi}).
\end{aligned}$$

Donc $\displaystyle\int_{\frac{2}{\pi}}^a \ln\left(\cos\left(\frac{1}{t}\right)\right) dt$ converge. Finalement, en $+\infty$, nous avons

$$\ln\left(\cos\left(\frac{1}{t}\right)\right) = \ln\left(1 - \frac{\left(\frac{1}{t}\right)^2}{2!} + o\left(\frac{1}{t^2}\right)\right) = -\frac{1}{2t^2} + o\left(\frac{1}{t^2}\right) \sim -\frac{1}{2t^2}$$

Or pour tout $a > \frac{2}{\pi}$ nous avons que $\displaystyle\int_a^{+\infty} -\frac{1}{t^2} dt$ est une intégrale de Riemann avec $\alpha = 2 > 1$. Par conséquent, K converge.

Exercice 4. *Déterminer pour quelles valeurs du couple* $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ *les intégrales suivantes sont convergentes :*

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha(1+x^\beta)} \quad ; \quad \int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x^\alpha)}{x^\beta} dx.$$

Solution :

$\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha(1+x^\beta)}$: Cherchons un équivalent simple en 0 et en $+\infty$ de la fonction f définie sur $]0, \infty[$ par

$$f(x) = \frac{1}{x^\alpha\left(1+x^\beta\right)}$$

Le résultat dépend du signe de β. On peut résumer ce que l'on obtient dans le tableau suivant :

	$\sim f(x)$ en 0	$\sim f(x)$ en $+\infty$	condition de convergence de $\int_0^1 f(x)\,dx$	condition de convergence de $\int_1^\infty f(x)\,dx$
$\beta > 0$	$\frac{1}{x^\alpha}$	$\frac{1}{x^{\alpha+\beta}}$	$\alpha < 1$	$\alpha + \beta > 1$
$\beta = 0$	$\frac{1}{2x^\alpha}$	$\frac{1}{2x^\alpha}$	$\alpha < 1$	$\alpha > 1$
$\beta < 0$	$\frac{1}{x^{\alpha+\beta}}$	$\frac{1}{x^\alpha}$	$\alpha + \beta < 1$	$\alpha > 1$

L'ensemble des couples (α, β) pour lesquels l'intégrale $\displaystyle\int_0^\infty f(x)dx$ est le domaine du plan limité par les droites d'équation $\alpha + \beta = 1$ et $\alpha = 1$ (exclues). On ne peut jamais avoir $\beta = 0$.

$\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x^\alpha)}{x^\beta} dx$: Même méthode. Les équivalents dépendent du signe de α cette fois. Remarquons que si $\alpha > 0, x^\alpha$ tend vers 0 en 0 donc

$$\ln\left(1+x^\alpha\right) \sim x^\alpha$$

et si $\alpha < 0$, on peut écrire

$$\begin{aligned} \ln\left(1+x^\alpha\right) &= \ln\left(x^\alpha\right) + \ln\left(1+x^{-\alpha}\right) \\ &= \alpha \ln x \left(1 + \frac{\ln\left(1+x^{-\alpha}\right)}{\alpha \ln x}\right) \end{aligned}$$

et donc

$$\ln\left(1+x^\alpha\right) \sim \alpha \ln x.$$

On a des résultats inversés en $+\infty$. On peut résumer ce que l'on obtient dans le tableau suivant :

	$\sim f(x)$ en 0	$\sim f(x)$ en $+\infty$	condition de convergence de $\int_0^1 f(x)\,dx$	condition de convergence de $\int_1^\infty f(x)\,dx$
$\alpha > 0$	$\dfrac{1}{x^{\beta-\alpha}}$	$\alpha\dfrac{\ln x}{x^\beta}$	$\beta - \alpha < 1$	$\beta > 1$
$\alpha = 0$	$\dfrac{\ln 2}{x^\beta}$	$\dfrac{\ln 2}{x^\beta}$	$\beta < 1$	$\beta > 1$
$\alpha < 0$	$\alpha\dfrac{\ln x}{x^\beta}$	$\dfrac{1}{x^{\beta-\alpha}}$	$\beta < 1$	$\beta - \alpha > 1$

L'ensemble des couples (α, β) pour lesquels l'intégrale $\displaystyle\int_0^\infty f(x)dx$ est le domaine du plan limité par les droites d'équation $\beta - \alpha = 1$ et $\beta = 1$ (exclues). On ne peut jamais avoir $\alpha = 0$.

Exercice 5. *Étudier la nature des intégrales :*

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{1-\sqrt{x}} \quad ; \quad J = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x} - e^{-2x}}{x} dx.$$

Solution :

$I = \displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{1-\sqrt{x}}$: La fonction $\dfrac{1}{1-\sqrt{x}}$ est continue sur $[0, 1[$. Le problème de convergence de l'intégrale est donc en 1. Pour étudier ce problème, on fait un développement limité en 1 en posant $x = 1+u$. Lorsque x tend vers 1, u tend vers 0. De plus,

$$1 - \sqrt{x} = 1 - \sqrt{1+u} = 1 - (1 + \frac{u}{2} + o(u)) = -\frac{u}{2} + o(u)$$

et donc

$$1 - \sqrt{x} \sim \frac{1-x}{2}.$$

La fonction est donc équivalente en 1 à $\dfrac{2}{1-x}$. Cette dernière fonction n'est pas intégrable (c'est une intégrale de Riemann divergente), on en déduit que $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{1-\sqrt{x}}$ est divergente.

$J = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x} - e^{-2x}}{x} dx$: En effectuant un développement limité en 0 , on a

$$e^{-t} - e^{-2t} = 1 - t - (1 - 2t) + \circ(t) = t + \circ(t)$$

donc

$$\lim_{t\to 0} \frac{e^{-t} - e^{-2t}}{t} = 1$$

et la fonction se prolonge par continuité en 0 . Il en résulte que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-t} - e^{-2t}}{t} dt$ converge. D'autre part, si $t \geq 1$, on a

$$0 \leq \frac{e^{-t}}{t} \leq e^{-t} \quad \text{ et } \quad 0 \leq \frac{e^{-2t}}{t} \leq e^{-2t}$$

et puisque les intégrales $\int_1^\infty e^{-t}dt$ et $\int_1^\infty e^{-2t}dt$ convergent, les intégrales $\int_1^\infty \frac{e^{-t}}{t}dt$ et $\int_1^\infty \frac{e^{-2t}}{t}dt$ convergent également. Donc l'intégrale $\int_1^\infty \frac{e^{-t}-e^{-2t}}{t}dt$ converge.