Département de Mathématiques
Prépa 2 - Intégration et probabilités
18 Mars 2021
1h30

DS1 - Intégration et probabilités

Consignes

- Appareils électroniques et documents interdits
- Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction et de la précision des justifications.
- Le sujet comporte quatre exercices. L'ordre dans lequel ceux-ci sont traités n'est pas imposé.

Exercice 1 : (5 points) Étudier la nature des intégrales suivantes et donner, si cela a un sens, la valeur de l'intégrale.

1. $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}\,\mathrm{d}t$.
2. $\displaystyle\int_{-1}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(t+2)(t+3)}$.
3. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$, où $\alpha \in \mathbb{R}$.
4. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$, où $\alpha \in \mathbb{R}$.

Solution 1

1. Pas de problème en 0. En $+\infty$, on a $\lim\limits_{t\to+\infty} t^2e^{-t} = 0$. Donc l'intégrale converge.

   Soit $A > 0$, on a $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}\,\mathrm{d}t = \lim_{A\to+\infty}\int_0^A e^{-t}\,\mathrm{d}t$. Or,
   $$\int_0^A e^{-t}\,\mathrm{d}t = [-e^{-t}]_0^A = 1 - e^{-A} \underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} 1.$$

2. Pas de problème en -1. En $+\infty$, on sait que $\frac{1}{(t+2)(t+3)} \sim \frac{1}{t^2}$ intégrale de Riemann qui converge car $\alpha = 2 > 1$.
   Par une décomposition en éléments simples, on obtient
   $$\begin{aligned}\int_{-1}^{+\infty} \frac{1}{(t+2)(t+3)}\,\mathrm{d}t &= \int_{-1}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t+2} - \int_{-1}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t+3}\\ &= [\ln(t+2)-\ln(t+3)]_{-1}^{+\infty} = \lim_{A\to+\infty}[\ln\left(\frac{t+2}{t+3}\right)]_{-1}^{A} = -\ln(1/2) = \ln(2).\end{aligned}$$

3. Intégrale de Riemann qui converge lorsque $\alpha > 1$ (voir le cours).
4. Intégrale de Riemann qui converge lorsque $\alpha < 1$ (voir le cours).

Exercice 2 : (4 points) Déterminer les valeurs de α pour lesquelles les intégrales suivantes convergent :

1. $I(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha(t+1)}\,\mathrm{d}t$;
2. $J(\alpha) = \int_e^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x(\ln(x))^\alpha}$;

Solution 2

1. En 0, $\frac{1}{t^\alpha(t+1)} \sim \frac{1}{t^\alpha}$. Donc, $\alpha < 1$.
   En $+\infty$, $\frac{1}{t^\alpha(t+1)} \sim \frac{1}{t^{\alpha+1}}$. Donc $\alpha + 1 > 1$ ce qui implique que $\alpha > 0$.
   Au final, $I(\alpha)$ converge si $\alpha \in]0;1[$.
2. Fonction de Bertrand, il faut que $\alpha > 1$ (voir le cours pour les calculs). Il faut que les étudiants fassent les calculs !

Exercice 3 : (6.5 points) Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t$ avec $f_n(t) = \dfrac{e^{-t}}{(1+t)^n}$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'intégrale I_n converge.
2. Calculer I_0.
3. Etudier le sens de variation de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et en déduire qu'elle converge vers une limite finie $\ell \in \mathbb{R}$.
4. Montrer que pour tout $n \geq 2$, $I_n = \dfrac{1 - I_{n-1}}{n-1}$.
5. En déduire la valeur de ℓ, puis un équivalent de I_n quand n tend vers $+\infty$.

Solution 3 Soit $n \in \mathbb{N}$.

1. La fonction $t \mapsto \frac{e^{-t}}{(1+t)^n}$ est continue sur $[0;+\infty[$.

$$\forall t \geq 0 \quad 0 \leq f_n(t) \leq e^{-t}$$

   et $\int_0^{+\infty} e^{-t}\,\mathrm{d}t = 1$ converge. Donc, $\int_0^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t$ converge.
2. $I_0 = \int_0^{+\infty} f_0(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} e^{-t}\,\mathrm{d}t = 1$.
3. Soit $n \in \mathbb{N}$, $\forall t \geq 0$, on a

$$0 \leq \frac{e^{-t}}{(1+t)^{n+1}} \leq \frac{e^{-t}}{(1+t)^n},$$

   donc $0 \leq I_{n+1} \leq I_n$. La suite (I_n) est donc décroissante. Elle est de plus minorée par 0, elle est donc convergente. On note ℓ sa limite.
4. Soit $n \geq 2$. Soit $A > 0$

$$\int_0^A \frac{e^{-t}}{(1+t)^n}\,\mathrm{d}t \underbrace{=}_{IPP} \left[-\frac{1}{n-1}\frac{e^{-t}}{(1+t)^{n-1}}\right]_0^A + \frac{1}{n-1}\int_0^A -\frac{e^{-t}}{(1+t)^{n-1}}\,\mathrm{d}t.$$

   Quand A tend vers $+\infty$, on obtient $I_n = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n-1}I_{n-1}$.
5. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = l \in \mathbb{R}^+$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n-1}I_{n-1} = 0$, et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$. On a

$$(n-1)I_n = 1 - I_{n-1},$$

   donc $\lim\limits_{n\to+\infty}(n-1)I_n = 1$, et donc $I_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n-1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$.

Exercice 4 : (5 points)

1. Soit f la fonction définie par $f(x,y) = x + y$. Calculer $\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ où D est le triangle de sommets O, $A(1,0)$ et $B(0,1)$.

2. Soit f la fonction définie par $f(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2}$. Calculer en utilisant les coordonnées polaires $\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ où D est la couronne limitée par les cercles de centre O et de rayons respectifs a et b $(0 < a < b)$.

Solution 4

1. On a

$$
\begin{aligned}
\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \int_{x=0}^{x=1} \left(\int_{y=0}^{y=-x+1} (x+y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x \\
&= \int_{x=0}^{x=1} \left[xy + \frac{y^2}{2} \right]_{y=0}^{y=-x+1} \mathrm{d}x = \int_{x=0}^{x=1} x(-x+1) + \frac{(1-x)^2}{2}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{x=0}^{x=1} -\frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{x^3}{6} + \frac{1}{2}x \right]_0^1 = -\frac{1}{6} + \frac{1}{2} = \frac{1}{3}.
\end{aligned}
$$

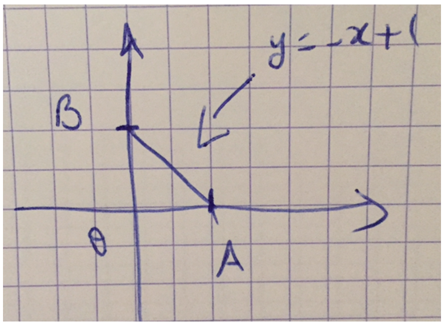

FIGURE 1 – Le domaine D.

2. En utilisant les coordonnées polaires

$$
\begin{cases} x = r\cos(\theta) \\ y = r\sin(\theta) \end{cases}
$$

on obtient

$$
\begin{aligned}
\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \int_0^{2\pi} \left(\int_a^b \frac{1}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \right) \\
&= \int_0^{2\pi} \left(\int_a^b \frac{1}{r^2} r\,\mathrm{d}r \right) \mathrm{d}\theta = \int_0^{2\pi} [\ln(r)]_a^b\,\mathrm{d}\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \ln(\frac{a}{b})\,\mathrm{d}\theta = 2\pi\ln(\frac{b}{a}).
\end{aligned}
$$

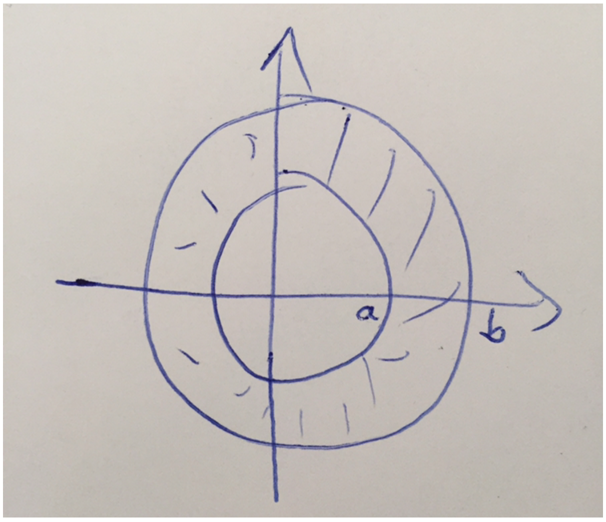

FIGURE 2 – Le domaine D.